1등급 만들기

확률과 통계 325제

바른답 · 알찬풀이

I 경우의 수

01 순열과 조합

교과서에서 뽑은 기본 문제

pp. 8~9

001 (1) 120 (2) 48	**002** (1) 2 (2) 4	**003** 125
004 60	**005** (1) 6 (2) 3	**006** 36

001 (1) 6명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$

(2) 반장과 부반장을 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

반장과 부반장이 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\times2=48$

1등급 비법

원탁에 둘러앉는 방법의 수

① n명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는 $(n-1)!$

② 원탁에 둘러앉을 때

(i) 이웃하는 사람이 있으면

⇨ 이웃하는 사람을 한 사람으로 생각한다.

(ii) 이웃하지 않는 사람이 있으면

⇨ 이웃해도 되는 사람을 먼저 원형으로 배열한다.

002 (1) ${}_n\Pi_7=n^7$이므로 $n^7=128=2^7$ $\quad\therefore n=2$

(2) ${}_3\Pi_r=3^r$이므로 $3^r=81=3^4$ $\quad\therefore r=4$

003 구하는 세 자리 자연수의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

004 여섯 개의 숫자 중에서 1이 3개, 2가 2개 있으므로 구하는 방법의 수는

$\dfrac{6!}{3!\times2!}=60$

005 (1) ${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2$이므로 $n=6$

(2) ${}_5H_r={}_{5+r-1}C_r={}_{4+r}C_r$이므로

${}_{4+r}C_r={}_7C_4={}_7C_3$ $\quad\therefore r=3$

006 구하는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$

유형 분석 기출 문제

pp. 10~17

007 ④	**008** 1440	**009** ②	**010** ③	**011** 8
012 30	**013** ⑤	**014** ④	**015** ③	**016** ⑤
017 ③	**018** 127	**019** 24	**020** ⑤	**021** 1600
022 ③	**023** 500	**024** ④	**025** ②	**026** ②
027 ①	**028** ③	**029** ③	**030** 30	**031** ②
032 ④	**033** ①	**034** 30	**035** 56	
036 (1) 120 (2) 20 (3) 56		**037** 27	**038** ④	**039** ①
040 10	**041** 35	**042** ④	**043** ③	**044** ⑤

007 각 부부를 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

각 부부끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!\times2!\times2!=8$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\times8=16$

008 어른 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

아이 3명이 어른 사이사이 5개의 자리 중에서 3개를 택하여 앉는 방법의 수는

${}_5P_3=5\times4\times3=60$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\times60=1440$

개념 보충

순열의 수

서로 다른 n개에서 r $(0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수는

${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$

009 야구 선수 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

농구 선수 3명이 야구 선수 사이사이 3개의 자리에 앉는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\times6=12$

010 빨간색을 칠하는 날개가 결정되면 파란색을 칠하는 날개는 마주 보는 날개로 고정되므로 구하는 방법의 수는 파란색을 제외한 5가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같다.

$\therefore (5-1)!=4!=24$

다른풀이 구하는 방법의 수는 빨간색과 파란색을 서로 맞은편에 칠한 다음, 빨간색과 파란색을 제외한 나머지 4가지 색을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

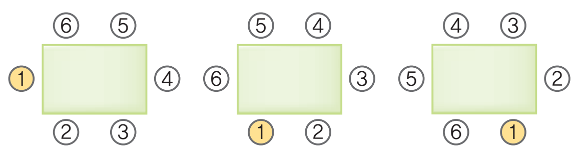
$4!=24$

011 가운데 삼각형을 칠하는 방법의 수는
4
나머지 3개의 삼각형을 칠하는 방법의 수는 가운데 삼각형에 칠한 색을 제외한 나머지 3가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(3-1)!=2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는
$4\times2=8$

012 밑면인 정사각형을 칠하는 방법의 수는
5 …… ㉮
4개의 옆면을 칠하는 방법의 수는 밑면인 정사각형에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(4-1)!=3!=6$ …… ㉯
따라서 구하는 방법의 수는
$5\times6=30$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 밑면을 칠하는 방법의 수 구하기	20%
㉯ 옆면을 칠하는 방법의 수 구하기	50%
㉰ 사각뿔의 각 면을 칠하는 방법의 수 구하기	30%

013 6명이 원형으로 둘러앉는 방법의 수는
$(6-1)!=5!=120$
이때 주어진 직사각형 모양의 탁자에서는 원형으로 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 3가지의 서로 다른 경우가 존재한다.

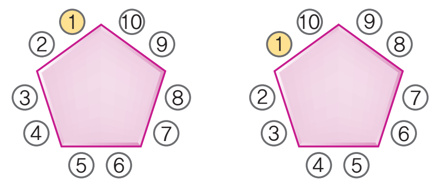


따라서 구하는 방법의 수는
$120\times3=360$

1등급 비법

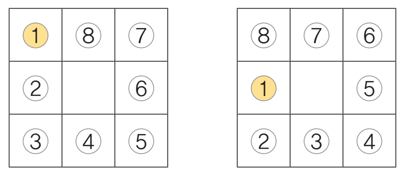
다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수
다각형 모양의 탁자에 n명이 둘러앉는 경우의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) n명을 원형으로 배열하는 경우의 수를 구한다.
(ii) 원형으로 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여 기준이 되는 자리의 위치에 따라 서로 다른 경우의 수를 구한다.
(iii) (i), (ii)에서 구한 경우의 수를 곱한다.

014 10명이 원형으로 둘러앉는 방법의 수는
$(10-1)!=9!$
이때 주어진 정오각형 모양의 탁자에서는 원형으로 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 2가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는
$9!\times2$
$\therefore a=2$

015 10가지 색 중에서 9가지 색을 택하는 방법의 수는
${}_{10}C_9={}_{10}C_1=10$
택한 9가지 색으로 가운데 사각형을 칠하는 방법의 수는
9
나머지 8개의 사각형을 칠하는 방법의 수는 가운데 사각형에 칠한 색을 제외한 나머지 8가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(8-1)!=7!$
이때 주어진 사각형 모양에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 2가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는
$10\times9\times7!\times2=10!\times\frac{1}{4}$

016 구하는 날씨의 종류의 개수는 서로 다른 4개의 그림에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_5=4^5=1024$

017 마지막 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
1, 3, 5의 3개
첫 번째 자리, 두 번째 자리, 세 번째 자리의 숫자를 택하는 방법의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_6\Pi_3=6^3=216$
따라서 구하는 비밀번호의 개수는
$3\times216=648$

018 각 전구마다 켜거나 끄는 2가지의 방법이 있으므로 전구 7개로 만들 수 있는 신호의 개수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복순열의 수와 같다.
$\therefore {}_2\Pi_7=2^7=128$
이때 모든 전구가 꺼져 있는 경우는 제외하므로 구하는 신호의 개수는
$128-1=127$

019 X에서 Y로의 함수는 집합 Y의 원소 -1, 1에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 집합 X의 원소 x, y, z, w에 대응시키면 된다.
따라서 모든 함수의 개수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$a={}_2\Pi_4=2^4=16$
$f(x)\neq 1$이면 집합 X의 원소 x에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 -1뿐이다.
또, $f(y)$, $f(z)$, $f(w)$의 값을 정하는 방법의 수는 -1, 1의 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_2\Pi_3=2^3=8$
따라서 $f(x)\neq 1$인 함수의 개수는
$b=1\times 8=8$
$\therefore a+b=24$

020 서로 다른 과일 5개 중에서 그릇 A에 담을 2개의 과일을 택하는 경우의 수는
${}_5C_2=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$
나머지 3개의 과일을 그릇 B, C에 담는 경우의 수는 서로 다른 2개의 그릇에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_2\Pi_3=2^3=8$
따라서 구하는 경우의 수는
$10\times 8=80$

개념 보충

조합의 수
서로 다른 n개에서 r $(0\leq r\leq n)$개를 택하는 조합의 수는
$${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$$

021 남학생 2명이 고등학교에 배정되는 경우의 수는 서로 다른 5개의 고등학교에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
→ 여자 고등학교 1개를 제외한 나머지 5개이다.
${}_5\Pi_2=5^2=25$
여학생 3명이 고등학교에 배정되는 경우의 수는 서로 다른 4개의 고등학교에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
→ 남자 고등학교 2개를 제외한 나머지 4개이다.
${}_4\Pi_3=4^3=64$
따라서 구하는 경우의 수는
$25\times 64=1600$

022 5개의 숫자에서 4개를 택하는 중복순열의 수는
${}_5\Pi_4=5^4=625$
2를 제외한 나머지 4개의 숫자에서 4개를 택하는 중복순열의 수는
${}_4\Pi_4=4^4=256$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$625-256=369$

023 $f(1)+f(4)=7$을 만족시키는 $f(1)$, $f(4)$의 값을 순서쌍 $(f(1), f(4))$로 나타내면
$(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$의 4가지 …… ㉮
$f(2)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 방법의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_5\Pi_3=5^3=125$ …… ㉯
따라서 구하는 함수의 개수는
$4\times 125=500$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $f(1)$, $f(4)$의 값을 정하는 방법의 수 구하기	40%
㉯ $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 방법의 수 구하기	40%
㉰ 함수의 개수 구하기	20%

024 특수 문자를 1개 사용하여 만들 수 있는 암호의 개수는 서로 다른 3개의 문자에서 1개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_1=3$
특수 문자를 2개 사용하여 만들 수 있는 암호의 개수는 서로 다른 3개의 문자에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_2=3^2=9$
같은 방법으로 특수 문자를 3개, 4개, 5개 사용하여 만들 수 있는 암호의 개수는 각각
${}_3\Pi_3=3^3=27$,
${}_3\Pi_4=3^4=81$,
${}_3\Pi_5=3^5=243$
따라서 구하는 암호의 개수는
$3+9+27+81+243=363$

025 (i) 한 자리 자연수의 개수는
1, 2, 3의 3
(ii) 두 자리 자연수의 개수는
$3\times{}_4\Pi_1=3\times 4=12$
(iii) 세 자리 자연수의 개수는
$3\times{}_4\Pi_2=3\times 4^2=48$
(iv) 1□□□ 꼴의 네 자리 자연수의 개수는
${}_4\Pi_3=4^3=64$
이상에서 2000보다 작은 자연수의 개수는
$3+12+48+64=127$
이므로 2000은 128번째 수이다.

1등급 비법

자연수의 개수
자연수 n $(n\leq 9)$, m에 대하여
(1) 1, 2, 3, ⋯, n의 n개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 m자리 자연수의 개수
⇨ ${}_n\Pi_m$
(2) 0, 1, 2, ⋯, n의 $(n+1)$개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 m자리 자연수의 개수
⇨ $\boxed{n}\times{}_{n+1}\Pi_{m-1}$
→ 맨 앞자리에 0이 올 수 없다.

026 양 끝에 2개의 a를 나열한 후, 그 사이에 나머지 5개의 문자 s, u, s, g, e를 일렬로 나열하면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
$\frac{5!}{2!}=60$

027 3, 4, 5의 순서가 정해져 있으므로 3, 4, 5를 모두 X로 생각하여 1, 1, 1, 2, X, X, X를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 X는 3, 두 번째 X는 4, 세 번째 X는 5로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
$\frac{7!}{3!\times3!}=140$

> **1등급 비법**
> 서로 다른 n개를 일렬로 나열할 때, 특정한 r $(0<r\le n)$개를 미리 정해진 순서대로 나열하는 방법의 수는 순서가 정해진 r개를 같은 것으로 생각하여 같은 것이 r개 포함된 n개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다. 즉,
> $\frac{n!}{r!}$

028 a와 d, c와 e의 순서가 각각 정해져 있으므로 a, d를 모두 X로, c, e를 모두 Y로 생각하여 6개의 문자 X, b, Y, X, Y, f를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 X는 a, 두 번째 X는 d, 첫 번째 Y는 c, 두 번째 Y는 e로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
$\frac{6!}{2!\times2!}=180$

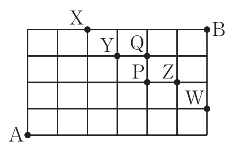
029 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리에 소수 3, 7, 7을 나열하는 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}=3$
나머지 자리에 4, 4, 6, 6, 6을 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!\times3!}=10$
따라서 구하는 경우의 수는
$3\times10=30$

030 5개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3에서 4개를 택하는 경우는
1, 2, 2, 3 또는 1, 2, 3, 3 또는 2, 2, 3, 3 …… ㉮
(i) 4개의 숫자 1, 2, 2, 3으로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는
$\frac{4!}{2!}=12$
(ii) 4개의 숫자 1, 2, 3, 3으로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는
$\frac{4!}{2!}=12$
(iii) 4개의 숫자 2, 2, 3, 3으로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는
$\frac{4!}{2!\times2!}=6$ …… ㉯
이상에서 구하는 자연수의 개수는
$12+12+6=30$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 5개의 숫자 중에서 4개를 택하는 경우 구하기	30%
㉯ 각 경우에 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수 구하기	60%
㉰ 네 자리 자연수의 개수 구하기	10%

031 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는
$\frac{10!}{6!\times4!}=210$
A 지점에서 $\overline{\text{PQ}}$를 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는
A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수
$\frac{6!}{4!\times2!}\times1\times\frac{3!}{2!}=45$
Q 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수
따라서 구하는 방법의 수는
$210-45=165$

다른풀이 오른쪽 그림과 같이 네 지점 X, Y, Z, W를 정하면 A 지점에서 $\overline{\text{PQ}}$를 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법은



A ⟶ X ⟶ B, A ⟶ Y ⟶ B
A ⟶ Z ⟶ B, A ⟶ W ⟶ B
중 하나이다.
(i) A ⟶ X ⟶ B로 가는 방법의 수는
$\frac{6!}{2!\times4!}\times1=15$
(ii) A ⟶ Y ⟶ B로 가는 방법의 수는
$\frac{6!}{3!\times3!}\times\frac{4!}{3!}=80$
(iii) A ⟶ Z ⟶ B로 가는 방법의 수는
$\frac{7!}{5!\times2!}\times\frac{3!}{2!}=63$
(iv) A ⟶ W ⟶ B로 가는 방법의 수는
$\frac{7!}{6!}\times1=7$
이상에서 구하는 방법의 수는
$15+80+63+7=165$

032 m과 w를 제외한 6개의 문자 t, o, o, r, r, o를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$\frac{6!}{3!\times2!}=60$
6개의 문자 사이사이와 양 끝의 7개의 자리 중 2개를 택하여 m과 w를 나열하는 방법의 수는
${}_7\mathrm{P}_2=7\times6=42$
따라서 구하는 방법의 수는

$60\times42=2520$

다른풀이 8개의 문자 t, o, m, o, r, r, o, w를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{8!}{3!\times2!}=3360$

m과 w를 한 문자 X로 생각하여 7개의 문자 t, o, o, r, r, o, X를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{7!}{3!\times2!}=420$

m과 w의 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

즉, m과 w가 이웃하도록 나열하는 방법의 수는

$420\times2=840$

따라서 구하는 방법의 수는

$3360-840=2520$

033 (i) 일의 자리 숫자가 0인 경우

1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\times3!}=10$

(ii) 일의 자리 숫자가 2인 경우

0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\times2!}=30$

맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$

따라서 일의 자리 숫자가 2인 짝수의 개수는

$30-6=24$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$10+24=34$

다른풀이 (i) 맨 앞자리의 숫자가 1인 경우

0, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!}=20$

일의 자리의 숫자가 1인 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

→ 0, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수

즉, 맨 앞자리의 숫자가 1인 짝수의 개수는

$20-4=16$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!\times2!}=30$

일의 자리의 숫자가 1인 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

→ 0, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수

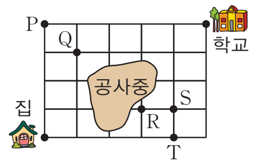
즉, 맨 앞자리의 숫자가 1인 짝수의 개수는

$30-12=18$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$16+18=34$

034 오른쪽 그림과 같이 다섯 지점 P, Q, R, S, T를 정하면 집에서 학교까지 최단 거리로 가는 방법은



집 ⟶ P ⟶ 학교,

집 ⟶ Q ⟶ 학교,

집 ⟶ R ⟶ S ⟶ 학교, 집 ⟶ T ⟶ 학교

중 하나이다.

(i) 집 ⟶ P ⟶ 학교로 가는 방법의 수는

$1\times1=1$

(ii) 집 ⟶ Q ⟶ 학교로 가는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{3!}\times\dfrac{5!}{4!}=4\times5=20$

(iii) 집 ⟶ R ⟶ S ⟶ 학교로 가는 방법의 수는

$1\times1\times\dfrac{4!}{3!}=4$

(iv) 집 ⟶ T ⟶ 학교로 가는 방법의 수는

$1\times\dfrac{5!}{4!}=5$

이상에서 구하는 방법의 수는

$1+20+4+5=30$

035 구하는 서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_5={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

036 (1) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 방법은 집합 Y의 6개의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 3개를 택하여 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

이때 이 방법의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{P}_3=6\times5\times4=120$

(2) $f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 방법은 집합 Y의 6개의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 3개를 택하여 크기가 작은 것부터 차례대로 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

이때 이 방법의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

(3) $f(1)\le f(2)\le f(3)$을 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 방법은 집합 Y의 6개의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 차례대로 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

이때 이 방법의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{H}_3={}_{6+3-1}\mathrm{C}_3={}_8\mathrm{C}_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

1등급 비법

집합 $X=\{1, 2, 3, \cdots, r\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$(r, n은 자연수)으로의 함수 f에 대하여 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$일 때,

(1) 일대일함수 f의 개수
⇨ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수
⇨ ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$ (단, $n \ge r$)

(2) $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수
⇨ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수
⇨ ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$ (단, $n \ge r$)

(3) $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수
⇨ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수
⇨ ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$

037 방정식 $x+y+z=9$를 만족시키는 x, y, z가 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$a={}_{3}\mathrm{H}_{9}={}_{3+9-1}\mathrm{C}_{9}={}_{11}\mathrm{C}_{9}={}_{11}\mathrm{C}_{2}=\dfrac{11\times10}{2\times1}=55$ …… ㉮

x, y, z가 모두 자연수일 때,
$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$ (X, Y, Z는 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x+y+z=9$에서
$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=9$
$\therefore X+Y+Z=6$
즉, 방정식 $x+y+z=9$를 만족시키는 x, y, z가 모두 자연수인 해의 개수는 방정식 $X+Y+Z=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

$b={}_{3}\mathrm{H}_{6}={}_{3+6-1}\mathrm{C}_{6}={}_{8}\mathrm{C}_{6}={}_{8}\mathrm{C}_{2}=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$ …… ㉯

$\therefore a-b=55-28=27$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ a의 값 구하기	40%
㉯ b의 값 구하기	50%
㉰ $a-b$의 값 구하기	10%

038 무기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{2}\mathrm{H}_{10}={}_{2+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{11}\mathrm{C}_{10}={}_{11}\mathrm{C}_{1}=11$
$\therefore a=11$
또, 기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 10개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_{2}\Pi_{10}=2^{10}=1024$
$\therefore b=1024$
$\therefore a+b=1035$

오답 피하기 무기명 투표는 어느 유권자가 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 후보 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합으로 생각할 수 있다.

039 먼저 장미 꽃 5송이, 목화 꽃 3송이를 사고 나머지 7송이의 꽃을 더 사면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}\mathrm{H}_{7}={}_{4+7-1}\mathrm{C}_{7}={}_{10}\mathrm{C}_{7}={}_{10}\mathrm{C}_{3}=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

1등급 비법

n명에게 같은 물건 r개를 나누어 줄 때, 한 명에게 적어도 한 개를 나누어 주는 방법의 수는
${}_{n}\mathrm{H}_{r-n}$ (단, $n \le r$)

040 고구마 피자, 새우 피자, 불고기 피자, 치즈 피자 중에서 m개를 주문하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 m개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}\mathrm{H}_{m}={}_{4+m-1}\mathrm{C}_{m}={}_{m+3}\mathrm{C}_{m}={}_{m+3}\mathrm{C}_{3}$
$=\dfrac{(m+3)(m+2)(m+1)}{3\times2\times1}=84$

$(m+3)(m+2)(m+1)=504=9\times8\times7$
$\therefore m=6$ …… ㉮

고구마 피자, 새우 피자, 불고기 피자, 치즈 피자를 적어도 하나씩 포함하여 6개를 주문하려면 4종류의 피자를 1개씩 주문하고 나머지 2개의 피자를 더 주문하면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}\mathrm{H}_{2}={}_{4+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ m의 값 구하기	50%
㉯ 각 종류의 피자를 적어도 하나씩 포함하여 m개를 주문하는 경우의 수 구하기	50%

041 $x+y+z+w \le 3$에서 x, y, z, w가 음이 아닌 정수이므로
$x+y+z+w=0$ 또는
$x+y+z+w=1$ 또는
$x+y+z+w=2$ 또는
$x+y+z+w=3$

(i) $x+y+z+w=0$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는
${}_{4}\mathrm{H}_{0}={}_{4+0-1}\mathrm{C}_{0}={}_{3}\mathrm{C}_{0}=1$

(ii) $x+y+z+w=1$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는
${}_{4}\mathrm{H}_{1}={}_{4+1-1}\mathrm{C}_{1}={}_{4}\mathrm{C}_{1}=4$

(iii) $x+y+z+w=2$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는
${}_{4}\mathrm{H}_{2}={}_{4+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

(iv) $x+y+z+w=3$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는
${}_{4}\mathrm{H}_{3}={}_{4+3-1}\mathrm{C}_{3}={}_{6}\mathrm{C}_{3}=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

이상에서 구하는 해의 개수는
$1+4+10+20=35$

042 x, y, z는 $x\ge 0$, $y\ge 1$, $z\ge 2$인 정수이므로
$x=X$, $y=Y+1$, $z=Z+2$ (X, Y, Z는 음이 아닌 정수)
로 놓으면 $x+y+z=k$에서
$X+(Y+1)+(Z+2)=k$
$\therefore X+Y+Z=k-3$
즉, 방정식 $x+y+z=k$를 만족시키는 $x\ge 0$, $y\ge 1$, $z\ge 2$인 정수인 해의 개수는 방정식 $X+Y+Z=k-3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로
$${}_{3}H_{k-3}={}_{3+(k-3)-1}C_{k-3}$$
$$={}_{k-1}C_{k-3}={}_{k-1}C_{2}$$
이때 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수는 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같으므로
$$\frac{(k-1)(k-2)}{2\times 1}=21$$
$(k-1)(k-2)=42=7\times 6$
$\therefore k=8$

043 $f(2)=7$이므로
$f(1)\le 7\le f(3)\le f(4)\le f(5)$
$f(1)\le 7$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는
6, 7의 2개
또, $7\le f(3)\le f(4)\le f(5)$를 만족시키는 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 방법은 집합 Y의 4개의 원소 7, 8, 9, 10에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 차례대로 집합 X의 원소 3, 4, 5에 대응시키면 된다.
이때 이 방법의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$${}_{4}H_{3}={}_{4+3-1}C_{3}={}_{6}C_{3}$$
$$=\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}=20$$
따라서 구하는 함수의 개수는
$2\times 20=40$

044 서로 다른 종류의 사탕 3개를 같은 종류의 주머니 3개에 각각 1개씩 나누어 넣는 방법의 수는 1
서로 다른 종류의 사탕에 의해 주머니가 모두 구분되므로 같은 종류의 구슬 7개를 서로 다른 주머니 3개에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 주머니에 구슬이 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣으려면 먼저 각 주머니에 구슬을 1개씩 넣은 후, 남은 구슬 4개를 더 넣으면 된다.
이때 이 방법의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$${}_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}$$
$$=\frac{6\times 5}{2\times 1}=15$$
따라서 구하는 경우의 수는
$1\times 15=15$

실력 완성 1등급 문제

pp. 18~20

045 ③	046 ④	047 180	048 7	049 540
050 ⑤	051 ①	052 ⑤	053 ④	054 36
055 45	056 ②	057 ②	058 ①	

045 원순열
전략 남학생 4명을 먼저 자리에 앉히고, 여학생을 앉히는 방법의 수를 구한다.
풀이 남학생 4명이 정사각형 모양의 탁자의 네 변 중에서 각각 한 변을 택하는 방법의 수는
$(4-1)!=3!$
남학생이 두 개씩 붙어 있는 의자 중에서 자신이 앉을 자리를 택하여 앉는 방법의 수는
$2\times 2\times 2\times 2=16$
즉, 남학생 4명이 탁자에 앉는 방법의 수는
$3!\times 16$
남은 네 개의 의자에 여학생 4명이 앉는 방법의 수는
$4!$
따라서 구하는 방법의 수는
$3!\times 16\times 4!=4!\times 96$
$\therefore a=96$
오답 피하기 정사각형 모양의 탁자의 한 변에는 의자가 2개씩이므로 남학생 4명이 자리에 앉을 때, 4명 모두 의자를 고르는 것까지 고려해야 한다.

046 원순열
전략 같은 모양의 면의 개수를 파악하여 기준이 되는 영역을 정한다.
풀이 (i) 정육면체 A를 칠하는 경우
한 면을 밑면으로 정할 때, 밑면에 한 가지 색을 칠하면 마주 보는 밑면을 칠하는 방법의 수는 5
나머지 4개의 옆면을 칠하는 방법의 수는 밑면인 정사각형에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(4-1)!=3!=6$
$\therefore a=5\times 6=30$
(ii) 직육면체 B를 칠하는 경우
모서리의 길이가 각각 1인 면 2개에 칠할 2가지 색을 정하는 방법의 수는
$${}_{6}C_{2}=\frac{6\times 5}{2\times 1}=15$$
나머지 4개의 면을 칠하는 방법의 수는 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(4-1)!=3!=6$
$\therefore b=15\times 6=90$
(iii) 직육면체 C를 칠하는 경우
모서리의 길이가 각각 1, 2인 면 중에서 한 면에 한 가지 색을 칠하면 다른 면을 칠하는 방법의 수는 5
나머지 4개의 면을 칠하는 방법의 수는

$\frac{4!}{\boxed{2}}=12$
같은 모양의 면이 2개씩 있다.
이므로 그 방법의 수는

$5\times12=60$

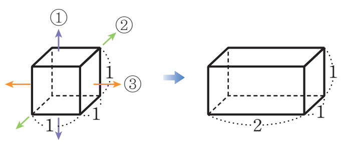
같은 방법으로 모서리의 길이가 1, 3인 면과 2, 3인 면에 대해서도 60가지씩 존재하므로

$c=60\times3=180$

이상에서

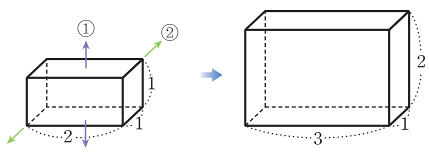
$a:b:c=30:90:180=1:3:6$

다른풀이 (ii) 정육면체 A를 좌우 방향 또는 상하 방향으로 자유롭게 늘일 수 있는 고무라 생각하면 직육면체 B는 정육면체 A의 세 방향 중에서 한 방향을 택하여 그 방향으로 길이가 2가 되도록 늘인 것과 같다.



$\therefore b=30\times3=90$

(iii) 직육면체 B를 좌우 방향 또는 상하 방향으로 자유롭게 늘일 수 있는 고무라 생각하면 직육면체 C는 직육면체 B에서 길이가 1인 두 방향 중에서 한 방향을 택하여 그 방향으로 길이가 3이 되도록 늘인 것과 같다.

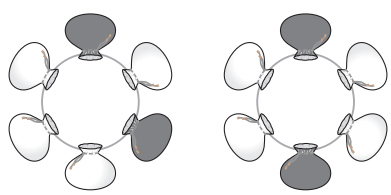


$\therefore c=90\times2=180$

047 원순열

전략 두 번 사용하는 색을 칠하는 방법의 수를 구한 다음, 각 경우에 대하여 나머지 색을 칠하는 방법의 수를 곱한다.

풀이 6개의 주머니를 5가지 색을 모두 사용하여 칠하려면 한 가지 색을 두 번 사용해야 한다. 이때 한 가지 색을 두 번 사용하는 경우는 다음 그림과 같이 2가지가 있다.



[그림 1] [그림 2]

(i) [그림 1]의 경우

두 번 사용할 색을 뽑아 어두운 부분에 칠하는 방법의 수는 5

나머지 4개의 주머니를 칠하는 방법의 수는 나머지 4개의 색을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로 $4!$

즉, [그림 1]과 같이 칠하는 방법의 수는

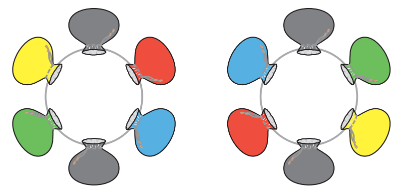
$5\times4!=120$

(ii) [그림 2]의 경우

두 번 사용할 색을 뽑아 어두운 부분에 칠하는 방법의 수는 5

나머지 4개의 주머니를 칠하는 방법의 수는 나머지 4개의 색을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으므로 $4!$

이때 어두운 부분을 제외한 4개의 주머니는 좌우 대칭이므로 색칠된 1가지 경우에 대하여 다음 그림과 같이 서로 구별되지 않는 경우가 2가지씩 존재한다.



즉, [그림 2]와 같이 칠하는 방법의 수는

$5\times\left(4!\times\frac{1}{2}\right)=60$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$120+60=180$

1등급 비법

n개의 영역에 n가지의 색을 칠하는 원순열에 관련된 문제는 원순열의 공식을 이용할 수 있지만, 주어진 문제처럼 영역의 개수보다 적은 색이 주어진 경우에는 원순열의 공식을 그대로 적용할 수가 없다. 따라서 색을 칠하는 방법이나 색의 수에 따라 경우를 나누고, 그 각각의 경우마다 그림을 그려 회전시켰을 때 같은 경우를 제외시켜야 한다.

048 중복순열

전략 깃발을 1번, 2번, ⋯, n번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수를 각각 구해 본다.

풀이 깃발을 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_1=2$

깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_2=2^2$

같은 방법으로 깃발을 3번, 4번, ⋯, n번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각

${}_2\Pi_3=2^3$, ${}_2\Pi_4=2^4$, ⋯, ${}_2\Pi_n=2^n$

이므로 n번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$2+2^2+2^3+\cdots+2^n$

$n=6$일 때,

$2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=126<200$

$n=7$일 때,

$2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7=254>200$

따라서 n의 최솟값은 7이다.

049 중복순열

전략 치역과 공역이 같은 경우는 집합 X의 원소가 집합 Y의 원소 a, b, c에 모두 대응하는 경우임을 이용한다.

풀이 X에서 Y로의 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_6=3^6=729$

(i) 치역의 원소가 2개인 경우

치역이 $\{a, b\}$인 함수의 개수는 치역의 원소 a, b의 2개에서 6개를 택하는 중복순열의 수에서 치역이 $\{a\}$ 또는 $\{b\}$인 함수의 개수를 뺀 것과 같으므로

$_2\Pi_6-2=2^6-2=62$

치역이 $\{b, c\}$, $\{a, c\}$인 함수의 개수도 각각 62이므로 치역의 원소가 2개인 함수의 개수는

$62\times3=186$

(ii) 치역의 원소가 1개인 경우

치역이 $\{a\}$ 또는 $\{b\}$ 또는 $\{c\}$인 함수의 개수는 3

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$729-(186+3)=540$

참고 치역과 공역이 같다는 것은 집합 Y의 각 원소마다 대응되는 집합 X의 원소가 반드시 있다는 뜻이다.

050 중복순열

전략 1끼리 이웃하지 않으려면 1은 세 번 이하로 사용해야 함을 이용하여 경우를 나눈다.

풀이 1을 네 번 사용하면 1끼리 서로 이웃하게 되므로 조건 ㈏에 의하여 1은 세 번 이하로 사용해야 한다.

(i) 1을 사용하지 않는 경우

만의 자리에는 2만 올 수 있고 나머지 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 2의 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_4=2^4=16$

(ii) 1을 한 번 사용하는 경우

만의 자리에 1이 오면 나머지 자리에는 0 또는 2가 올 수 있으므로

$_2\Pi_4=2^4=16$ ······ ㉠

만의 자리에 2가 오면 나머지 자리의 숫자 중에서 하나는 1이고 남은 세 자리에는 0 또는 2가 올 수 있으므로

$_4C_1\times{}_2\Pi_3=4\times2^3=32$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 자연수의 개수는

$16+32=48$

(iii) 1을 두 번 사용하는 경우

만의 자리에 1이 오면 천의 자리를 제외한 나머지 자리의 숫자 중에서 하나는 1이고 남은 세 자리에는 0 또는 2가 올 수 있으므로

$_3C_1\times{}_2\Pi_3=3\times2^3=24$ ······ ㉢

만의 자리에 2가 오면 천의 자리와 십의 자리 또는 천의 자리와 일의 자리 또는 백의 자리와 일의 자리에 1이 와야 하고 남은 두 자리에는 0 또는 2가 올 수 있으므로

$3\times{}_2\Pi_2=3\times2^2=12$ ······ ㉣

㉢, ㉣에서 자연수의 개수는

$24+12=36$

(iv) 1을 세 번 사용하는 경우

만의 자리, 백의 자리, 일의 자리에 1이 와야 하고 남은 두 자리에는 0 또는 2가 올 수 있으므로

$_2\Pi_2=2^2=4$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$16+48+36+4=104$

051 같은 것이 있는 순열

전략 ★ 모양의 스티커의 장수를 기준으로 4장의 스티커를 고르는 경우를 파악해 본다.

풀이 ★이 3장, ♣가 2장, ♥가 1장이므로

(i) ★, ★, ★, ♥를 골라 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ii) ★, ★, ★, ♣를 골라 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(iii) ★, ★, ♥, ♣를 골라 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(iv) ★, ★, ♣, ♣를 골라 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

(v) ★, ♥, ♣, ♣를 골라 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

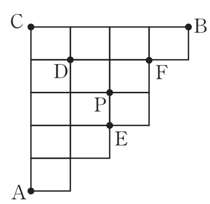
이상에서 구하는 모든 배열의 수는

$4+4+12+6+12=38$

052 같은 것이 있는 순열

전략 이동하면서 반드시 거쳐야 하는 지점을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 네 지점 C, D, E, F를 잡으면 A 지점에서 P 지점을 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법은



A ⟶ C ⟶ B, A ⟶ D ⟶ B,

A ⟶ E ⟶ F ⟶ B

중 하나이다.

(i) A ⟶ C ⟶ B로 가는 방법의 수는 1

(ii) A ⟶ D ⟶ B로 가는 방법의 수는

$\frac{5!}{4!}\times\frac{4!}{3!}=20$

(iii) A ⟶ E ⟶ F ⟶ B로 가는 방법의 수는

$\left(\frac{4!}{2!\times2!}-1\right)\times\boxed{1}\times2!=10$

P 지점은 거치지 않는다.

이상에서 구하는 방법의 수는

$1+20+10=31$

053 같은 것이 있는 순열

전략 점 P가 상(↑), 하(↓), 좌(←), 우(→)로 움직이는 횟수를 각각 a, b, c, d로 놓고 관계식을 구한다.

풀이 점 P가 상(↑), 하(↓), 좌(←), 우(→)로 움직이는 횟수를 각각 a, b, c, d (a, b, c, d는 음이 아닌 정수)로 놓으면

$a+b+c+d=7$, $a-b=1$, $-c+d=-2$

위의 세 식에서 b, c, d를 각각 a에 대한 식으로 나타내면

$b=a-1$, $c=5-a$, $d=3-a$ …… ㉠

(i) $a=1$인 경우

㉠을 만족시키는 b, c, d의 값은 $b=0$, $c=4$, $d=2$이므로 ↑, ←, ←, ←, ←, →, →로 이동하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{4!\times2!}=105$

(ii) $a=2$인 경우

㉠을 만족시키는 b, c, d의 값은 $b=1$, $c=3$, $d=1$이므로 ↑, ↑, ↓, ←, ←, ←, →로 이동하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\times3!}=420$

(iii) $a=3$인 경우

㉠을 만족시키는 b, c, d의 값은 $b=2$, $c=2$, $d=0$이므로 ↑, ↑, ↑, ↓, ↓, ←, ←로 이동하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{3!\times2!\times2!}=210$

이상에서 구하는 경우의 수는

$105+420+210=735$

참고 $a-b=1$에서 $b=a-1$

$b=a-1$을 $a+b+c+d=7$에 대입하면

$a+(a-1)+c+d=7$ $\quad\therefore c+d=8-2a$

$c+d=8-2a$와 $-c+d=-2$를 연립하여 c, d를 각각 a에 대한 식으로 나타내면

$c=5-a$, $d=3-a$

054 중복조합

전략 사과를 선택하지 않는 경우와 사과를 1개 선택하는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) 사과를 선택하지 않는 경우

선택해야 하는 나머지 과일은 8개이므로 먼저 감, 배, 귤을 각각 1개씩 선택한 후, 나머지 과일 5개를 선택하면 된다.

따라서 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

(ii) 사과를 1개 선택하는 경우

선택해야 하는 나머지 과일은 7개이므로 먼저 감, 배, 귤을 1개씩 선택한 후, 나머지 과일 4개를 선택하면 된다.

따라서 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$21+15=36$

055 중복조합

전략 홀수인 자연수 x, y, z를 $2k+1$ (k는 음이 아닌 정수) 꼴로 변형한다.

풀이 x, y, z가 홀수인 자연수이므로

$x=2X+1$, $y=2Y+1$, $z=2Z+1$

(X, Y, Z는 음이 아닌 정수)

로 놓으면 $x+y+z=19$에서

$(2X+1)+(2Y+1)+(2Z+1)=19$

$2X+2Y+2Z=16$

$\therefore X+Y+Z=8$

즉, 방정식 $x+y+z=19$를 만족시키는 홀수인 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $X+Y+Z=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

$_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$

056 중복조합

전략 $a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le a_5$인 경우에서 $a_1=a_2\le a_3\le a_4\le a_5$ 또는 $a_1\le a_2\le a_3=a_4\le a_5$인 경우를 제외한다.

풀이 $a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le a_5$를 만족시키는 경우의 수는

$_6H_5={}_{6+5-1}C_5={}_{10}C_5=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252$

$a_1=a_2\le a_3\le a_4\le a_5$와 $a_1\le a_2\le a_3=a_4\le a_5$를 만족시키는 경우의 수는 각각

$_6H_4={}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

또, $a_1=a_2\le a_3=a_4\le a_5$를 만족시키는 경우의 수는

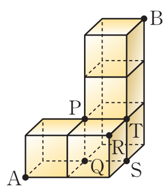
$_6H_3={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

따라서 구하는 경우의 수는

$252-(126+126-56)=56$

057 같은 것이 있는 순열

1단계 정육면체의 모서리를 따라 이동하면서 반드시 거쳐야 하는 점을 파악하여 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법을 찾는다.



오른쪽 그림과 같이 5개의 점 P, Q, R, S, T를 정하면 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법은

A ⟶ Q ⟶ B, A ⟶ P ⟶ B,

A ⟶ S ⟶ B, A ⟶ R ⟶ T ⟶ B

중 하나이다.

2단계 각각의 경우에서 최단 거리로 가는 방법의 수를 구한다.

(i) A ⟶ Q ⟶ B로 가는 방법의 수는

$2!\times\dfrac{5!}{3!}=40$

(ii) A ⟶ P ⟶ B로 가는 방법의 수는

$3!\times\dfrac{4!}{2!}=72$

(iii) A ⟶ S ⟶ B로 가는 방법의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{4!}{3!}=12$

(iv) A ⟶ R ⟶ T ⟶ B로 가는 방법의 수는

$$\frac{3!}{2!}\times1\times\frac{3!}{2!}=9$$

이때

(ⅰ), (ⅱ)에서 A $\longrightarrow$ Q $\longrightarrow$ P $\longrightarrow$ B인 경우,

(ⅰ), (ⅲ)에서 A $\longrightarrow$ Q $\longrightarrow$ S $\longrightarrow$ B인 경우

가 중복되며 그 방법의 수는 각각

$$2!\times1\times\frac{4!}{2!}=24,\ 2!\times1\times\frac{4!}{3!}=8$$

3단계 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 구한다.

이상에서 구하는 방법의 수는

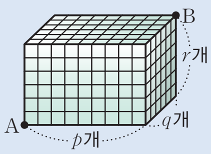
$40+72+12+9-(24+8)=101$

1등급 비법

입체도형에서 최단 거리로 가는 방법의 수

오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체를 가로, 세로, 높이의 칸의 개수가 각각 p, q, r가 되도록 쌓아 올려 직육면체를 만들었을 때, 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$$\frac{(p+q+r)!}{p!\times q!\times r!}$$



058 중복조합

1단계 [그림 2]와 같은 타블로에서 열을 채우는 경우의 수를 구한다.

[그림 2]와 같은 타블로에서 아래로 가면 숫자가 커지도록 하나의 열을 채우는 경우는 다음 그림과 같이 4가지가 있다.

1	1	1	2
2	2	3	3
3	4	4	4

2단계 만들 수 있는 모든 타블로의 개수를 구한다.

오른쪽으로 가면 숫자가 커지거나 같으므로 이 4개의 열 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후, 위의 그림의 순서대로 배열하면 타블로가 하나 완성된다.

따라서 구하는 타블로의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_3={}_{4+3-1}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

02 이항정리

교과서에서 뽑은 기본 문제 p. 21

059 (1) $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$
(2) $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

060 (1) 112 (2) 1120 **061** (1) 32 (2) 0 (3) 16

059 (1) $(x+y)^4$

$={}_4\mathrm{C}_0x^4+{}_4\mathrm{C}_1x^3y+{}_4\mathrm{C}_2x^2y^2+{}_4\mathrm{C}_3xy^3+{}_4\mathrm{C}_4y^4$

$=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

(2) $(x-2)^5$

$={}_5\mathrm{C}_0x^5+{}_5\mathrm{C}_1x^4(-2)+{}_5\mathrm{C}_2x^3(-2)^2+{}_5\mathrm{C}_3x^2(-2)^3$
$+{}_5\mathrm{C}_4x(-2)^4+{}_5\mathrm{C}_5(-2)^5$

$=x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

060 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

$${}_8\mathrm{C}_rx^{8-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_8\mathrm{C}_r\times2^r\times\frac{x^{8-r}}{x^r}$$

(1) x^4항은 $\dfrac{x^{8-r}}{x^r}=x^4$, 즉 $8-r-r=4$일 때이므로

$r=2$

따라서 x^4의 계수는

${}_8\mathrm{C}_2\times2^2=28\times4=112$

(2) 상수항은 $8-r=r$일 때이므로

$r=4$

따라서 상수항은

${}_8\mathrm{C}_4\times2^4=70\times16=1120$

061 (1) ${}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_5=2^5=32$

(2) ${}_5\mathrm{C}_0-{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2-{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4-{}_5\mathrm{C}_5=0$

(3) ${}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_5=2^{5-1}=2^4=16$

유형 분석 기출 문제 pp. 22~24

062 ④	**063** 6	**064** 60	**065** ②	**066** ③
067 ③	**068** ③	**069** 6	**070** 2	**071** ③
072 ②	**073** ③	**074** ②	**075** ②	**076** 221
077 ⑤				

062 $(x-3y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_rx^{5-r}(-3y)^r={}_5\mathrm{C}_r(-3)^rx^{5-r}y^r$

x^3y^2항은 $r=2$일 때이므로 x^3y^2의 계수는

${}_5\mathrm{C}_2\times(-3)^2=10\times9=90$

063 $(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r(x^2)^r={}_n\mathrm{C}_rx^{2r}$

x^4항은 $2r=4$일 때이므로 $r=2$

이때 x^4의 계수가 15이므로

${}_n\mathrm{C}_2=15$

$\dfrac{n(n-1)}{2}=15,\ n^2-n-30=0$

$(n+5)(n-6)=0\qquad\therefore\ n=6\ (\because\ n$은 자연수$)$

064 $\left(ax-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(ax)^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6C_r(-1)^r a^{6-r}\dfrac{x^{6-r}}{x^r}$ …… ㉮

상수항은 $6-r=r$일 때이므로 $r=3$

즉, 상수항은 ${}_6C_3(-1)^3a^3=-20a^3$

이때 상수항이 -160이므로

$-20a^3=-160$, $20(a-2)(a^2+2a+4)=0$

$\therefore a=2$ ($\because$ a는 실수) …… ㉯

$\dfrac{1}{x^2}$항은 $r-(6-r)=2$일 때이므로 $r=4$

따라서 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수는

${}_6C_4\times(-1)^4\times2^2=15\times1\times4=60$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $\left(ax-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항 구하기	30%
㉯ a의 값 구하기	40%
㉰ $\dfrac{1}{x^2}$의 계수 구하기	30%

참고 이차방정식 $a^2+2a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\times4=-3<0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

065 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^{4-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\dfrac{x^{4-r}}{x^r}$ …… ㉠

이때

$(x^2+2x-3)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4+2x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$

이므로 이 전개식에서 상수항은 x^2과 ㉠의 $\dfrac{1}{x^2}$항, $2x$와 ㉠의 $\dfrac{1}{x}$항, -3과 ㉠의 상수항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 $\dfrac{1}{x^2}$항은 $r-(4-r)=2$일 때이므로 $r=3$

따라서 ㉠의 $\dfrac{1}{x^2}$항은

${}_4C_3\times\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4}{x^2}$

(ii) ㉠에서 $\dfrac{1}{x}$항은 $r-(4-r)=1$일 때이므로 $r=\dfrac{5}{2}$

그런데 r는 $0\le r\le4$인 정수이므로 ㉠의 $\dfrac{1}{x}$항은 존재하지 않는다.

(iii) ㉠에서 상수항은 $4-r=r$일 때이므로 $r=2$

따라서 ㉠의 상수항은

${}_4C_2=6$

이상에서 구하는 상수항은

$x^2\times\dfrac{4}{x^2}+(-3)\times6=-14$

066 $(1-x)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r(-x)^r={}_7C_r(-1)^r x^r$

$(a+x)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_s a^{3-s}x^s$

따라서 $(1-x)^7(a+x)^3$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r(-1)^r x^r\times{}_3C_s a^{3-s}x^s$

$={}_7C_r\times{}_3C_s(-1)^r a^{3-s}x^{r+s}$

이때 x^2항은

$r+s=2$ ($0\le r\le7$, $0\le s\le3$인 정수)

일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

즉, x^2의 계수는

${}_7C_0\times{}_3C_2(-1)^0a^1+{}_7C_1\times{}_3C_1(-1)^1a^2+{}_7C_2\times{}_3C_0(-1)^2a^3$

$=3a-21a^2+21a^3$

이때 x^2의 계수가 3이므로

$3a-21a^2+21a^3=3$, $3(a-1)(7a^2+1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because$ a는 실수)

참고 이차방정식 $7a^2+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=-4\times7\times1=-28<0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

067 $(x+2)^{19}$의 전개식의 일반항은

${}_{19}C_r 2^{19-r}x^r$

x^k의 계수는 ${}_{19}C_k 2^{19-k}$

x^{k+1}의 계수는 ${}_{19}C_{k+1}2^{19-(k+1)}={}_{19}C_{k+1}2^{18-k}$

이때 x^k의 계수가 x^{k+1}의 계수보다 크려면

${}_{19}C_k 2^{19-k}>{}_{19}C_{k+1}2^{18-k}$

양변을 2^{18-k}으로 나누면 ${}_{19}C_k\times2>{}_{19}C_{k+1}$

즉, $\dfrac{19!}{k!\times(19-k)!}\times2>\dfrac{19!}{(k+1)!\times(18-k)!}$이므로

양변에 $\dfrac{(k+1)!\times(19-k)!}{19!}$을 곱하면

$2(k+1)>19-k$

$3k>17$ $\quad\therefore k>\dfrac{17}{3}=5.6\times\times\times$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

068 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-{}_nC_0=2^n-1$

따라서 주어진 부등식에서

$500<2^n-1<1000$

$\therefore 501<2^n<1001$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n=9$

069 ${}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$이므로

$2^{2n-1}=2048=2^{11}$

$2n-1=11 \quad \therefore n=6$

참고 $(1+x)^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1x+{}_{2n}C_2x^2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}x^{2n}$의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n}$ ...... ㉠

${}_{2n}C_0-{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2-\cdots+{}_{2n}C_{2n}=0$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면

$2({}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1})=2^{2n}$

$\therefore {}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}=2^{2n-1}$

070 ${}_{20}C_0-{}_{20}C_1+{}_{20}C_2-{}_{20}C_3+\cdots-{}_{20}C_{19}+{}_{20}C_{20}=0$이므로

${}_{20}C_0-({}_{20}C_1-{}_{20}C_2+{}_{20}C_3-\cdots+{}_{20}C_{19})+{}_{20}C_{20}=0$

$\therefore {}_{20}C_1-{}_{20}C_2+{}_{20}C_3-\cdots+{}_{20}C_{19}={}_{20}C_0+{}_{20}C_{20}$

$=1+1=2$

다른풀이 ${}_{20}C_1-{}_{20}C_2+{}_{20}C_3-\cdots+{}_{20}C_{19}$

$=({}_{20}C_1+{}_{20}C_3+\cdots+{}_{20}C_{19})$
$-({}_{20}C_2+{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{18})$

$=({}_{20}C_1+{}_{20}C_3+\cdots+{}_{20}C_{19})$
$-({}_{20}C_0+{}_{20}C_2+\cdots+{}_{20}C_{20})$
$+({}_{20}C_0+{}_{20}C_{20})$

$=2^{20-1}-2^{20-1}+(1+1)=2$

071 ${}_{15}C_r={}_{15}C_{15-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 15)$이므로

${}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_7$

$={}_{15}C_{15}+{}_{15}C_{14}+{}_{15}C_{13}+\cdots+{}_{15}C_8$

따라서 ${}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{15}=2^{15}$이므로

${}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_7=\frac{1}{2}\times 2^{15}=2^{14}$

072 ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8$

$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8$ $(\because {}_2C_0={}_3C_0=1)$

$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8$

$={}_5C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8$

$\vdots$

$={}_{10}C_7+{}_{10}C_8$

$={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

1등급 비법

파스칼의 삼각형에서 각 단계의 첫 번째 또는 마지막 수인 1에서 시작하여 대각선 방향으로 배열된 n개의 수를 더한 값은 그 다음 단계의 n번째 수와 같다.

이를 파스칼의 삼각형에 표시하면 다음 그림과 같이 하키 스틱처럼 보인다고 하여 '하키 스틱 패턴'이라 한다.

${}_1C_0 \quad {}_1C_1$

${}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2$

${}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3$

${}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4$

$\vdots$

${}_{10}C_0 \quad {}_{10}C_1 \quad \cdots \quad {}_{10}C_8 \quad {}_{10}C_9 \quad {}_{10}C_{10}$

${}_{11}C_0 \quad {}_{11}C_1 \quad \cdots \quad {}_{11}C_8 \quad {}_{11}C_9 \quad {}_{11}C_{10} \quad {}_{11}C_{11}$

073 ${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{12}C_2$

$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{12}C_2$ $(\because {}_2C_2={}_3C_3=1)$

$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{12}C_2$

$={}_5C_3+{}_5C_2+\cdots+{}_{12}C_2$

$\vdots$

$={}_{12}C_3+{}_{12}C_2$

$={}_{13}C_3$

074 원소의 개수가

2인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_2$

4인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_4$

6인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_6$

8인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_8$

10인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_{10}$

이때 ${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^{10-1}=2^9$이므로

구하는 부분집합의 개수는

${}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}$

$=2^9-{}_{10}C_0$

$=512-1=511$

075 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=3$, $n=10$을 대입하면

$(1+3)^{10}={}_{10}C_0+3\times{}_{10}C_1+3^2\times{}_{10}C_2+\cdots+3^{10}\times{}_{10}C_{10}$

따라서 주어진 식의 값은

$4^{10}=2^{20}$

076 $21=1+20$이므로

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=20$, $n=11$을 대입하면

$(1+20)^{11}$

$={}_{11}C_0+{}_{11}C_1\times20+{}_{11}C_2\times20^2+\cdots+{}_{11}C_{11}\times20^{11}$

$={}_{11}C_0+{}_{11}C_1\times20+20^2({}_{11}C_2+{}_{11}C_3\times20+\cdots+{}_{11}C_{11}\times20^9)$

$=1+11\times20+20^2({}_{11}C_2+{}_{11}C_3\times20+\cdots+{}_{11}C_{11}\times20^9)$

$=221+20^2({}_{11}C_2+{}_{11}C_3\times20+\cdots+{}_{11}C_{11}\times20^9)$ ...... ㉮

이때 $20^2({}_{11}C_2+{}_{11}C_3\times20+\cdots+{}_{11}C_{11}\times20^9)$은 400의 배수이므로 21^{11}을 400으로 나누었을 때의 나머지는 221을 400으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는 221이다. ...... ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 이항정리를 이용하여 $21^{11}=(1+20)^{11}$ 전개하기	40%
㉯ ㉮의 전개식에서 400으로 나누어 떨어지는 항을 찾고, 21^{11}을 400으로 나누었을 때의 나머지 구하기	60%

077 $({}_8C_0)^2+({}_8C_1)^2+({}_8C_2)^2+\cdots+({}_8C_8)^2$

$={}_8C_0\times{}_8C_0+{}_8C_1\times{}_8C_1+{}_8C_2\times{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8\times{}_8C_8$

$={}_8C_0\times{}_8C_8+{}_8C_1\times{}_8C_7+{}_8C_2\times{}_8C_6+\cdots+{}_8C_8\times{}_8C_0$

이므로 주어진 식은 $(1+x)^8(1+x)^8$, 즉 $(1+x)^{16}$의 전개식에서 x^8의 계수와 같다.

$(1+x)^{16}$의 전개식에서 x^8의 계수는 ${}_{16}C_8$이므로

$n=16,\ r=8$

$\therefore n+r=24$

1등급 비법

$(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수

$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$이므로 $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는

${}_nC_0\times{}_nC_n+{}_nC_1\times{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\times{}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n\times{}_nC_0$

이때 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

${}_nC_0\times{}_nC_n+{}_nC_1\times{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\times{}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n\times{}_nC_0$

$={}_nC_0\times{}_nC_0+{}_nC_1\times{}_nC_1+{}_nC_2\times{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n\times{}_nC_n$

$=({}_nC_0)^2+({}_nC_1)^2+({}_nC_2)^2+\cdots+({}_nC_n)^2$

실력 완성 1등급 문제

p. 25

078 ③	079 ④	080 71	081 ①	082 210

078 이항정리의 활용

전략 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$임을 이용한다.

풀이 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$ …… ㉠

㉠의 우변의 n에 1, 2, 3, 4, 5, 6 …을 차례대로 대입하면

1, 3, 7, 15, 31, 63, …

이므로 n이 짝수일 때 ㉠은 3의 배수이다.

따라서 100 이하의 자연수 중에서 짝수의 개수는 50이므로 구하는 n의 개수는 50이다.

참고 n이 짝수, 즉 $n=2k$ (k는 자연수)일 때,

$2^n-1=2^{2k}-1=4^k-1$

$=(4-1)(4^{k-1}+4^{k-2}+\cdots+1)$

$=3(4^{k-1}+4^{k-2}+\cdots+1)$

따라서 n이 짝수일 때, 2^n-1은 3의 배수이다.

079 이항정리의 활용

전략 $(1+a)^n={}_nC_0+{}_nC_1a+{}_nC_2a^2+\cdots+{}_nC_na^n$임을 이용한다.

풀이 $(1+32)^7$

$={}_7C_0+{}_7C_1\times32+{}_7C_2\times32^2+\cdots+{}_7C_7\times32^7$

에서 ${}_7C_0$, ${}_7C_7\times32^7$을 제외한 나머지 항은 모두 7의 배수이다.

이때 ${}_7C_0+{}_7C_7\times32^7=32^7+1$이고 오늘부터 32^7째 되는 날이 수요일이므로 $(1+32)^7$째 되는 날은 수요일의 다음 날인 목요일이다.

080 이항정리 ⊕ 이항정리의 활용

전략 $(1+3x)^n$의 전개식의 일반항을 이용하여 x^4의 계수를 구한 후, 이항계수의 성질을 이용한다.

풀이 $(1+3x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(3x)^r={}_nC_r3^rx^r$

이때 $4\le n\le9$인 경우에만 x^4항이 나오므로

$(1+3x)^4$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_4C_4\times3^4$

$(1+3x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_5C_4\times3^4$

$(1+3x)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_6C_4\times3^4$

⋮

$(1+3x)^9$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_9C_4\times3^4$

따라서 x^4의 계수는

${}_4C_4\times3^4+{}_5C_4\times3^4+{}_6C_4\times3^4+{}_7C_4\times3^4+{}_8C_4\times3^4+{}_9C_4\times3^4$

$=3^4({}_5C_5+{}_5C_4+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4+{}_9C_4)$ ($\because {}_4C_4={}_5C_5=1$)

$=3^4({}_6C_5+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4+{}_9C_4)$

$=3^4({}_7C_5+{}_7C_4+{}_8C_4+{}_9C_4)$

$=3^4({}_8C_5+{}_8C_4+{}_9C_4)$

$=3^4({}_9C_5+{}_9C_4)$

$=3^4\times{}_{10}C_5$

이므로 $k=3^4=81,\ n=10$

$\therefore k-n=71$

081 이항정리

(1단계) $(x+a^2)^n$과 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식의 일반항을 이용하여 x^{n-1}의 계수를 구한다.

$(x+a^2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(a^2)^rx^{n-r}={}_nC_ra^{2r}x^{n-r}$

이므로 $(x+a^2)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

${}_nC_1a^2=a^2n$

$(x^2-2a)(x+a)^n=x^2(x+a)^n-2a(x+a)^n$에서

$x^2(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $(x+a)^n$을 전개했을 때의 x^{n-3}의 계수와 같다. 이때 $(x+a)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_sa^sx^{n-s}$이므로 $x^2(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

${}_nC_3\times a^3=\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}\times a^3$

$2a(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는

$2a\times({}_nC_1\times a)=2a^2n$

따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\times a^3-2a^2n$

이다.

(2단계) 두 전개식의 x^{n-1}의 계수가 같음을 이용하여 a를 n에 관한 식으로 나타낸 후, a와 n이 자연수임을 이용하여 n의 값을 구한다.

그러므로 $a^2n=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\times a^3-2a^2n$에서

$n(n-1)(n-2)a^3-18a^2n=0$

$a^2n\{(n-1)(n-2)a-18\}=0$

$a,\ n$은 자연수이므로 $(n-1)(n-2)a-18=0$

즉, a를 n에 관한 식으로 나타내면

$a=\dfrac{18}{\boxed{(n-1)(n-2)}}$

이다. 여기서 a는 자연수이고 n은 4 이상의 자연수이므로

$n=\boxed{4}$

이다.

(3단계) 두 식 $f(n)$, $g(n)$과 k의 값을 정리하여 $f(k)+g(k)$의 값을 구한다.

따라서 $f(n)=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, $g(n)=(n-1)(n-2)$,

$k=4$이므로

$f(4)+g(4)=\frac{4\times3\times2}{6}+3\times2=10$

참고 a가 자연수이므로 $n-1$, $n-2$는 각각 18의 양의 약수 1, 2, 3, 6, 9, 18 중 하나이다.

이때 $n-1$, $n-2$는 연속하는 두 자연수이므로 가능한 $n-1$, $n-2$의 값은 2, 1 또는 3, 2이다.

따라서 n은 4 이상의 자연수이므로 $n-1=3$, $n-2=2$에서 $n=4$이다.

082 중복조합 ⊕ 이항계수의 성질

(1단계) 구하는 방법의 수를 중복조합의 수를 이용하여 나타낸다.

빨간색, 파란색, 노란색, 초록색 펜의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면 구하는 방법의 수는

$a+b+c+d\le10$ …… ㉠

을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같다. 이때

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$

$(a'\ge0, b'\ge0, c'\ge0, d'\ge0)$

로 놓으면 ㉠에서

$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)\le10$

$\therefore a'+b'+c'+d'\le6$

즉, 구하는 방법의 수는 $a'+b'+c'+d'\le6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같으므로

${}_4H_0+{}_4H_1+{}_4H_2+\cdots+{}_4H_6$

(2단계) 이항계수의 성질을 이용하여 계산한다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &{}_4H_0+{}_4H_1+{}_4H_2+\cdots+{}_4H_6\\&={}_3C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+\cdots+{}_9C_6\\&={}_4C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+\cdots+{}_9C_6\ (\because {}_3C_0={}_4C_0=1)\\&={}_5C_1+{}_5C_2+\cdots+{}_9C_6\\&\ \ \vdots\\&={}_9C_5+{}_9C_6\\&={}_{10}C_6={}_{10}C_4=210\end{aligned}$$

실전 대비 마무리 문제

pp. 26~27

083 ②	084 ①	085 ④	086 89	087 ③
088 ②	089 ④	090 ④	091 22	092 90

083 원순열

전략 두 반 B, C의 학생이 같은 반 학생끼리 이웃하게 앉는 방법의 수에서 세 반의 학생이 모두 같은 반 학생끼리 이웃하게 앉는 방법의 수를 뺀다.

풀이 B반 학생 3명, C반 학생 3명을 각각 한 사람으로 생각하여 A반 학생 2명과 함께 총 4명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이때 B반, C반 학생끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$3!\times3!=36$

즉, B반, C반 학생이 같은 반 학생끼리 이웃하게 앉는 방법의 수는

$6\times36=216$

한편, A반 학생 2명, B반 학생 3명, C반 학생 3명을 각각 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

이때 같은 반 학생끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!\times3!\times3!=72$

즉, A반, B반, C반 학생들이 같은 반 학생끼리 이웃하게 앉는 방법의 수는

$2\times72=144$

따라서 구하는 방법의 수는

$216-144=72$

084 원순열

전략 먼저 기준이 되는 영역을 칠하는 경우의 수를 구한다.

풀이 가운데 정사각형을 칠하는 방법의 수는

9

나머지 4개의 정사각형을 칠하는 방법의 수는 가운데 정사각형에 칠한 색을 제외한 나머지 8가지 색 중에서 4가지 색을 택한 후, 이 색들을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

${}_8C_4\times(4-1)!=\frac{8!}{4!\times4!}\times3!$

직각이등변삼각형은 좌우의 정사각형에 칠해진 색에 따라 모두 구분되므로 4개의 직각이등변삼각형을 칠하는 방법의 수는 나머지 4가지 색을 일렬로 배열하는 순열의 수와 같다.

$\therefore 4!$

따라서 구하는 방법의 수는

$9\times\frac{8!}{4!\times4!}\times3!\times4!=9!\times\frac{1}{4}$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

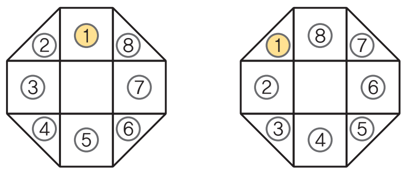
다른풀이 가운데 정사각형을 칠하는 방법의 수는

9

나머지 8개의 영역을 칠하는 방법의 수는 가운데 정사각형에 칠한 색을 제외한 나머지 8가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(8-1)!=7!$

이때 주어진 도형에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 2가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는

$9\times7!\times2=9!\times\frac{1}{4}$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

085 중복순열

전략 1000보다 작은 자연수의 개수에서 4와 5가 들어 있지 않은 수의 개수를 뺀다.

풀이 1000보다 작은 자연수의 개수는

999

4, 5를 제외한 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9의 8개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 1000보다 작은 자연수의 개수를 구해 보면

(i) 한 자리 자연수의 개수는 7

(ii) 두 자리 자연수의 개수는

$7\times{}_8\Pi_1=7\times8=56$

(iii) 세 자리 자연수의 개수는

$7\times{}_8\Pi_2=7\times8^2=448$

이상에서 1000보다 작은 자연수 중에서 4, 5가 들어 있지 않은 수의 개수는

$7+56+448=511$

따라서 4 또는 5가 들어 있는 수의 개수는

$999-511=488$

086 같은 것이 있는 순열

전략 1 또는 2의 합으로 10이 되는 경우를 찾는다.

풀이 1계단 올라가는 횟수를 a, 2계단 올라가는 횟수를 b라 하면

$a+2b=10$

이때 a, b는 음이 아닌 정수이므로 이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(10, 0)$, $(8, 1)$, $(6, 2)$, $(4, 3)$, $(2, 4)$, $(0, 5)$

(i) $(10, 0)$인 경우

10개의 계단을 올라가는 방법의 수는 10개의 a를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

1

(ii) $(8, 1)$인 경우

10개의 계단을 올라가는 방법의 수는 8개의 a, 1개의 b를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{9!}{8!}=9$

(iii) $(6, 2)$인 경우

10개의 계단을 올라가는 방법의 수는 6개의 a, 2개의 b를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{8!}{6!\times2!}=28$

(iv) $(4, 3)$인 경우

10개의 계단을 올라가는 방법의 수는 4개의 a, 3개의 b를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{7!}{4!\times3!}=35$

(v) $(2, 4)$인 경우

10개의 계단을 올라가는 방법의 수는 2개의 a, 4개의 b를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{6!}{2!\times4!}=15$

(vi) $(0, 5)$인 경우

10개의 계단을 올라가는 방법의 수는 5개의 b를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

1

이상에서 구하는 방법의 수는

$1+9+28+35+15+1=89$

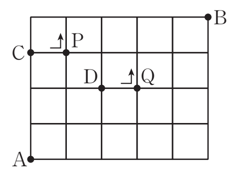
087 같은 것이 있는 순열

전략 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수에서 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 갈 때 P 지점 또는 Q 지점에서 좌회전을 하는 방법의 수를 뺀다.

풀이 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{9!}{5!\times4!}=126$

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 갈 때 P 지점 또는 Q 지점에서 좌회전을 하려면 오른쪽 그림과 같이 C 지점 또는 D 지점을 지나야 한다.



즉, A 지점에서 P 지점 또는 Q 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 갈 때 P 지점 또는 Q 지점에서 좌회전을 하려면 $C\longrightarrow P$, $D\longrightarrow Q$로 가야 한다.

(i) $A\longrightarrow C\longrightarrow P\longrightarrow$ (좌회전) $\longrightarrow B$로 가는 방법의 수는

$1\times1\times1=1$

(ii) $A\longrightarrow D\longrightarrow Q\longrightarrow$ (좌회전) $\longrightarrow B$로 가는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times1\times\frac{3!}{2!}=18$

(i), (ii)에서 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 갈 때 P 지점 또는 Q 지점에서 좌회전을 하는 방법의 수는

$1+18=19$

따라서 구하는 방법의 수는

$126-19=107$

088 중복조합

전략 $z=1$, $z=2$, $z=3$일 때로 나누어 주어진 방정식을 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구한다.

풀이 (i) $z=1$일 때, $x+y+z^2=12$에서 $x+y=11$

즉, $x+y=11$의 자연수인 해의 개수는

${}_2H_9={}_{10}C_9={}_{10}C_1=10$

(ii) $z=2$일 때, $x+y+z^2=12$에서 $x+y=8$

즉, $x+y=8$의 자연수인 해의 개수는

${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

(iii) $z=3$일 때, $x+y+z^2=12$에서 $x+y=3$

즉, $x+y=3$의 자연수인 해의 개수는

${}_2H_1={}_2C_1=2$

이상에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$10+7+2=19$

089 중복조합

전략 조건 (가), (나)를 만족시키는 $f(3)$, $f(4)$의 값을 구한 후, 각 경우를 만족시키는 함수의 개수를 구한다.

풀이 조건 (가)에서

$f(3)f(4)=1\times6=2\times3$

이때 조건 (나)에서 $f(3)\le f(4)$이므로

$f(3)=1$, $f(4)=6$ 또는 $f(3)=2$, $f(4)=3$

(i) $f(3)=1$, $f(4)=6$인 경우

조건 (나)에서 $f(1)\le f(2)\le1$이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는

1의 1개

또, 조건 (나)에서 $6\le f(5)\le f(6)$이므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 방법은 6, 7의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 차례대로 $f(5)$, $f(6)$에 대응시키면 된다. 즉, 이 방법의 수는

${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

따라서 $f(3)=1$, $f(4)=6$인 함수의 개수는

$1\times3=3$

(ii) $f(3)=2$, $f(4)=3$인 경우

조건 (나)에서 $f(1)\le f(2)\le2$이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 방법은 1, 2의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 차례대로 $f(1)$, $f(2)$에 대응시키면 된다. 즉, 이 방법의 수는

${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

또, 조건 (나)에서 $3\le f(5)\le f(6)$이므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 방법은 3, 4, 5, 6, 7의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 차례대로 $f(5)$, $f(6)$에 대응시키면 된다. 즉, 이 방법의 수는

${}_5H_2={}_6C_2=15$

따라서 $f(3)=2$, $f(4)=3$인 함수의 개수는

$3\times15=45$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$3+45=48$

090 이항정리

전략 $\left(x^2+\frac{1}{x^n}\right)^{12}$의 전개식의 일반항을 구하여 상수항이 존재하도록 하는 n과 r 사이의 관계식을 세운다.

풀이 $\left(x^2+\frac{1}{x^n}\right)^{12}$의 전개식의 일반항은

$${}_{12}C_r(x^2)^{12-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r={}_{12}C_r\frac{x^{24-2r}}{x^{nr}}$$

상수항은 $24-2r=nr$, 즉 $nr+2r=24$에서

$r(2+n)=24$ ($0\le r\le12$인 정수, n은 자연수)

일 때이므로 이를 만족시키는 r, n의 순서쌍 (r, n)은

$(1, 22)$, $(2, 10)$, $(3, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$, $(8, 1)$

따라서 자연수 n의 최댓값은 $r=1$일 때 22이다.

참고 $r=12$이면 $2+n=2$에서 $n=0$,

$r=24$이면 $2+n=1$에서 $n=-1$

이므로 n이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

091 이항정리의 활용

전략 회의에 참석하는 직원이 k명인 경우의 수는 ${}_{23}C_k$임을 이용하여 식을 세운다.

풀이 23명의 직원 중에서 회의에 참석하는 직원이

12명인 경우의 수는 ${}_{23}C_{12}$

13명인 경우의 수는 ${}_{23}C_{13}$

14명인 경우의 수는 ${}_{23}C_{14}$

⋮

23명인 경우의 수는 ${}_{23}C_{23}$

이므로 회의에 참석하는 직원이 12명 이상인 경우의 수는

${}_{23}C_{12}+{}_{23}C_{13}+{}_{23}C_{14}+\cdots+{}_{23}C_{23}$

이때 ${}_{23}C_r={}_{23}C_{23-r}$ $(r=0, 1, 2, 3, \cdots, 23)$이므로

${}_{23}C_{12}+{}_{23}C_{13}+{}_{23}C_{14}+\cdots+{}_{23}C_{23}$

$={}_{23}C_{11}+{}_{23}C_{10}+{}_{23}C_9+\cdots+{}_{23}C_0$

따라서 ${}_{23}C_0+{}_{23}C_1+{}_{23}C_2+\cdots+{}_{23}C_{23}=2^{23}$이므로

${}_{23}C_{12}+{}_{23}C_{13}+{}_{23}C_{14}+\cdots+{}_{23}C_{23}=\frac{1}{2}\times2^{23}=2^{22}$

$\therefore k=22$

092 이항정리의 활용

전략 $(1+a)^n={}_nC_0+{}_nC_1a+{}_nC_2a^2+\cdots+{}_nC_na^n$을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $9^2\times{}_{10}C_1+9^3\times{}_{10}C_2+9^4\times{}_{10}C_3+\cdots+9^{11}\times{}_{10}C_{10}$

$=9\times{}_{10}C_0+9^2\times{}_{10}C_1+9^3\times{}_{10}C_2+\cdots+9^{11}\times{}_{10}C_{10}-9\times{}_{10}C_0$

$=9\times({}_{10}C_0+9\times{}_{10}C_1+9^2\times{}_{10}C_2+\cdots+9^{10}\times{}_{10}C_{10})-9\times{}_{10}C_0$

$=9\times(1+9)^{10}-9$

$=9\times10^{10}-9$

$=8\underbrace{99\cdots9}_{9가\ 9개}1$

따라서 각 자리의 숫자의 합은

$8+9\times9+1=90$

Ⅱ 확률

03 확률의 뜻과 활용

교과서에서 뽑은 기본 문제 pp. 30~31

093 (1) $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (2) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ (3) $A=\{1, 3, 5\}$

094 $\frac{1}{6}$	**095** $\frac{8}{15}$	**096** $\frac{4}{9}$	**097** (1) 0 (2) 1
098 $\frac{2}{3}$	**099** $\frac{7}{20}$	**100** (1) $\frac{3}{25}$ (2) $\frac{22}{25}$	

093 (1) $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(2) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$
(3) 홀수는 1, 3, 5이므로 $A=\{1, 3, 5\}$

094 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
두 눈의 수의 합이 7인 경우는
$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$
의 6가지
따라서 구하는 확률은
$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

095 1500개의 씨앗 중에서 싹이 난 씨앗은 800개이므로 이 씨앗 1개를 심을 때, 싹이 날 확률은
$\frac{800}{1500}=\frac{8}{15}$

096 $\frac{(\text{초록색이 칠해진 부분의 넓이})}{(\text{전체 과녁의 넓이})}=\frac{4}{9}$

097 (1) 검은 공은 2개이므로 검은 공이 3개 나오는 사건은 절대로 일어날 수 없다.
따라서 구하는 확률은 0이다.
(2) 검은 공이 2개이므로 3개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 1개 이상 나오는 사건은 반드시 일어난다.
따라서 구하는 확률은 1이다.

098 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

099 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서
$\frac{3}{5}=\frac{1}{4}+P(B)$ $\quad\therefore P(B)=\frac{7}{20}$

100 (1) $A=\{8, 16, 24, \cdots, 48\}$에서 $n(A)=6$
$\therefore P(A)=\frac{6}{50}=\frac{3}{25}$
(2) $P(A^C)=1-P(A)$
$=1-\frac{3}{25}=\frac{22}{25}$

유형 분석 기출 문제 pp. 32~39

101 ③	**102** ㄴ	**103** ②	**104** ①	**105** ④
106 ②	**107** ⑤	**108** 35	**109** ②	**110** ③
111 ②	**112** ⑤	**113** $\frac{5}{16}$	**114** ①	**115** $\frac{4}{7}$
116 ①	**117** ③	**118** ②	**119** $\frac{1}{3}$	**120** ④
121 $\frac{7}{12}$	**122** ⑤	**123** ①, ②	**124** ③	**125** ④
126 ①	**127** ③	**128** 0.7	**129** $\frac{15}{64}$	**130** ④
131 ④	**132** ①	**133** ④	**134** ③	**135** 8
136 ④	**137** ①	**138** ⑤		

101 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이고
$A=\{5, 7, 9\}$, $B=\{3, 6, 9\}$
② $A\cup B=\{3, 5, 6, 7, 9\}$
④ $A^C=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$이므로
$n(A^C)=6$
⑤ $A\cap B^C=\{5, 7\}$이므로
$n(A\cap B^C)=2$
따라서 옳은 것은 ③이다.
다른풀이 ④ $n(A)=3$이므로 $n(A^C)=9-3=6$

102 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고
$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{1, 5\}$
$\therefore A\cap B=\{2\}$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\{5\}$
따라서 사건 A와 사건 C는 서로 배반사건이므로 서로 배반사건인 것은 ㄴ뿐이다.

103 사건 A와 배반인 사건은 사건 A^C의 부분집합이고, 사건 B^C와 배반인 사건은 사건 B의 부분집합이므로 두 사건 A, B^C와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B$의 부분집합이다.
따라서 $A^C\cap B=B-A=\{1, 13\}$이므로 사건 C의 개수는
$2^2=4$

개념 보충
집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여 집합 A의 부분집합의 개수는
$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{n\text{개}}=2^n$

104 1부터 n까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 정n면체 3개를 던지는 시행에서 모든 경우의 수는 n^3이고, 동전 1개를 던지는 시행에서 모든 경우의 수는 2이다.
이때 표본공간의 원소의 개수가 128이므로
$2n^3=128$
$n^3=64$ $\quad\therefore n=4$ ($\because$ n은 자연수)

105 7개의 구슬에서 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_7\mathrm{C}_2=21$
꺼낸 구슬에 적힌 두 자연수가 서로소인 경우는
$\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 5\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$, $\{5, 7\}$, $\{5, 8\}$, $\{6, 7\}$, $\{7, 8\}$
의 14가지
따라서 구하는 확률은
$\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$

106 6권의 책을 일렬로 꽂는 경우의 수는
$6!=720$
소설책 4권을 한 권으로 생각하여 총 3권을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $3!=6$이고, 소설책 4권의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4!=24$이므로 소설책끼리 이웃하여 꽂는 경우의 수는
$6\times24=144$
따라서 구하는 확률은
$\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

107 7명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는
${}_7\mathrm{C}_3=35$
경아는 대표로 뽑히고 예솔이는 대표로 뽑히지 않는 경우의 수는 경아와 예솔이를 제외한 나머지 5명 중에서 2명의 대표를 뽑고 경아를 포함시키는 경우의 수와 같으므로
${}_5\mathrm{C}_2=10$
따라서 구하는 확률은
$\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$

1등급 비법
서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수는 $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 뽑는 방법의 수와 같으므로 ${}_{n-k}\mathrm{C}_{r-k}$이다.

108 8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(8-1)!=7!$ …… ㉮
남학생 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!$이고, 남학생 사이사이의 4개의 자리에 여학생 4명이 앉는 경우의 수는 $4!$이므로 남녀가 교대로 앉는 경우의 수는
$3!\times4!$ …… ㉯
따라서 구하는 확률은 $\frac{3!\times4!}{7!}=\frac{1}{35}$이므로
$n=35$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 모든 경우의 수 구하기	30%
㉯ 남녀가 교대로 앉는 경우의 수 구하기	40%
㉰ n의 값 구하기	30%

109 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
${}_4\Pi_3=64$
세 자리 자연수가 짝수가 되려면 일의 자리의 숫자가 2이어야 하므로 짝수인 세 자리 자연수의 개수는
${}_4\Pi_2\times1=16$
따라서 구하는 확률은
$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$

110 3명의 학생이 5개의 방과후 체육 활동 중 한 가지를 택하는 경우의 수는
${}_5\Pi_3=125$
3명의 학생이 서로 다른 방과후 체육 활동을 택하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{P}_3=60$
따라서 구하는 확률은
$\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$

111 A, A, A, B, B, C의 문자가 하나씩 적힌 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{6!}{3!\times2!}=60$
양 끝에 A가 적힌 카드를 놓고 그 사이에 A, B, B, C가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$
따라서 구하는 확률은
$\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

112 상자에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n이라 하면
$\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$
$\frac{n(n-1)}{15\times14}=\frac{4}{15}$
$n(n-1)=56=8\times7$
$\therefore n=8$
따라서 상자에 들어 있는 당첨 제비의 개수는 8이다.

113 X에서 Y로의 함수 f의 개수는
${}_4\Pi_3=64$

조건을 만족시키는 함수는 집합 Y의 원소 4개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후, 작거나 같은 수부터 차례대로 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 그 개수는

${}_4H_3={}_6C_3=20$

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$

114 초콜릿 맛 우유, 딸기 맛 우유, 바나나 맛 우유, 커피 맛 우유 중에서 9개를 택하는 방법의 수는

${}_4H_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=220$

바나나 맛 우유를 하나도 택하지 않는 방법의 수는 초콜릿 맛 우유, 딸기 맛 우유, 커피 맛 우유 중에서 9개를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

따라서 구하는 확률은

$\frac{55}{220}=\frac{1}{4}$

115 정육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 서로 다른 두 꼭짓점을 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$ ······ ㉮

이 중에서 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우는 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{3}$이다.

(i) 선분의 길이가 $\sqrt{2}$인 경우의 수는 각 면의 대각선의 개수의 총합과 같으므로

$2\times6=12$

(ii) 선분의 길이가 $\sqrt{3}$인 경우의 수는 정육면체의 대각선의 개수와 같으므로 4

(i), (ii)에서 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우의 수는

$12+4=16$ ······ ㉯

따라서 구하는 확률은

$\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$ ······ ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 모든 경우의 수 구하기	30%
㉯ 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우의 수 구하기	60%
㉰ 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 이상일 확률 구하기	10%

116 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

한 개의 주사위의 눈의 수가 다른 두 개의 주사위의 눈의 수의 곱이 되는 경우는

(1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 3), (1, 4, 4), (1, 5, 5), (1, 6, 6), (2, 2, 4), (2, 3, 6)

(i) (1, 1, 1)인 경우의 수는 1

(ii) (1, 2, 2), (1, 3, 3), (1, 4, 4), (1, 5, 5), (1, 6, 6), (2, 2, 4)인 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times6=18$

(iii) (2, 3, 6)인 경우의 수는

$3!=6$

이상에서 한 개의 주사위의 눈의 수가 다른 두 개의 주사위의 눈의 수의 곱이 되는 경우의 수는

$1+18+6=25$

따라서 구하는 확률은 $\frac{25}{216}$

117 빨간 구슬이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{1}{6}=\frac{3}{3+5+n}$

$n+8=18$ $\quad\therefore n=10$

118 3단계까지 통과한 사람은 65520명이고 5단계까지 통과한 사람은 15600명이므로

$p=\frac{15600}{65520}=\frac{5}{21}$

$\therefore 42p=42\times\frac{5}{21}=10$

119 과녁 전체의 넓이는 반지름의 길이가 3인 원의 넓이와 같으므로

$\pi\times3^2=9\pi$

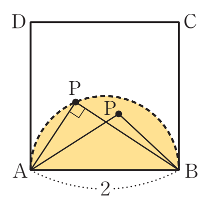
색칠한 부분의 넓이는

$\pi\times2^2-\pi\times1^2=3\pi$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3\pi}{9\pi}=\frac{1}{3}$

120 점 P가 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때 $\triangle PAB$는 직각삼각형이 되므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 $\triangle PAB$는 둔각삼각형이 된다.

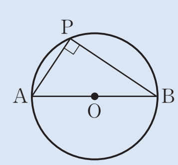


따라서 구하는 확률은

$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square ABCD\text{의 넓이})}=\frac{\pi\times1^2\times\frac{1}{2}}{2^2}=\frac{\pi}{8}$

1등급 비법

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 원의 지름의 양 끝 점과 원 위의 다른 한 점을 택하면 직각삼각형을 만들 수 있다.



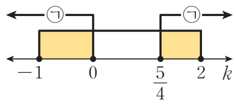
121 이차방정식 $x^2-4kx+5k=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5k\geq0$

$4k^2-5k\geq0$, $k(4k-5)\geq0$

$\therefore$ $k\leq0$ 또는 $k\geq\frac{5}{4}$ …… ㉠ …… ㉮

이때 주어진 조건 $-1\leq k\leq2$와 ㉠의 공통 범위를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-1\leq k\leq0$ 또는 $\frac{5}{4}\leq k\leq2$ …… ㉡ …… ㉯

따라서 구하는 확률은

$$\frac{(㉡\text{의 구간의 길이})}{(\text{전체 구간의 길이})}=\frac{\{0-(-1)\}+\left(2-\frac{5}{4}\right)}{2-(-1)}=\frac{7}{12}$$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 이차방정식이 실근을 갖는 k의 값의 범위 구하기	30%
㉯ 전체 범위 안에서의 k의 값의 범위 구하기	40%
㉰ 이차방정식이 실근을 가질 확률 구하기	30%

개념 보충

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)의 판별식을 D라 할 때,

① $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근을 갖는다.

③ $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

122 표본공간 $S=\{2, 4, 6, 8, 10\}$의 원소 중에서 홀수는 존재하지 않으므로 $\mathrm{P}(A)=0$

또, 표본공간 S의 모든 원소는 2의 배수이므로 $\mathrm{P}(B)=1$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$

123 ① $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$이므로

$\mathrm{P}(S)+\mathrm{P}(\varnothing)=1$

② $\varnothing\subset(A\cap B)\subset S$이므로 $\mathrm{P}(\varnothing)\leq\mathrm{P}(A\cap B)\leq\mathrm{P}(S)$

$\therefore$ $0\leq\mathrm{P}(A\cap B)\leq1$

③ $0\leq\mathrm{P}(A)\leq1$, $0\leq\mathrm{P}(B)\leq1$이므로

$0\leq\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\leq2$

④ [반례] $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{5, 6\}$이면 $A\cup B=S$이지만

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{6}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\neq1$

⑤ [반례] $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{4, 5, 6\}$이면 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$이지만

$A\cap B=\{5\}\neq\varnothing$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ①, ②이다.

124 $S=A\cup B$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=1$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$1=\mathrm{P}(A)+\frac{4}{7}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{7}$

125 ㄱ. $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=0.4+0.7-0.3=0.8$ (참)

ㄴ. $A\cap C=\varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)$

$=0.4+0.1=0.5$ (거짓)

ㄷ. $B\cup C=B$이므로

$\mathrm{P}(B\cup C)=\mathrm{P}(B)=0.7$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

126 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}\mathrm{P}(B)$에서

$\mathrm{P}(B)=\frac{5}{3}\mathrm{P}(A)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\frac{5}{3}\mathrm{P}(A)-\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)$

$=2\mathrm{P}(A)$

$\therefore$ $\frac{\mathrm{P}(A\cup B)}{\mathrm{P}(A\cap B)}=\frac{2\mathrm{P}(A)}{\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)}=3$

127 꺼낸 공이 모두 흰 공인 사건을 A, 모두 검은 공인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}$

128 택한 1명의 학생이 음악을 좋아하는 학생인 사건을 A, 체육을 좋아하는 학생인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.35$, $\mathrm{P}(B)=0.6$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{40}{160}=0.25$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=0.35+0.6-0.25=0.7$

129 $f(3)=5$인 사건을 A, $f(5)=7$인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_8\Pi_4}{{}_8\Pi_5}=\frac{8^4}{8^5}=\frac{1}{8}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_8\Pi_4}{{}_8\Pi_5}=\frac{8^4}{8^5}=\frac{1}{8}$ …… ㉮

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_8\Pi_3}{{}_8\Pi_5}=\frac{8^3}{8^5}=\frac{1}{64}$ …… ㉯

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{64}=\frac{15}{64}$$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $f(3)=5$, $f(5)=7$인 사건을 각각 A, B라 하고 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$ 구하기	40%
㉯ $\mathrm{P}(A\cap B)$ 구하기	30%
㉰ $\mathrm{P}(A\cup B)$ 구하기	30%

130 김치만두가 고기만두보다 많으려면 5개의 만두 중에서 김치만두는 3개 또는 4개이어야 한다.
김치만두를 3개 택하는 사건을 A, 4개 택하는 사건을 B라 하면
$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{5}{21},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_4\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{1}{42}$$
이때 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{5}{21}+\frac{1}{42}=\frac{11}{42}$$

131 두 상자 A, B에서 각각 한 장의 카드를 꺼낼 때, 모든 경우의 수는
$5\times5=25$
두 카드에 적힌 숫자의 합이 10 이상인 사건을 A, 소수인 사건을 B라 하면
$A=\{(1, 9), (2, 9), (3, 7), (3, 9), (4, 7), (4, 9), (5, 5), (5, 7), (5, 9)\}$
에서 $n(A)=9$
$B=\{(1, 1), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 9), (4, 1), (4, 3), (4, 7), (4, 9)\}$
에서 $n(B)=9$
$A\cap B=\{(2, 9), (4, 7), (4, 9)\}$
에서 $n(A\cap B)=3$
$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{9}{25},\ \mathrm{P}(B)=\frac{9}{25},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{25}$$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{9}{25}+\frac{9}{25}-\frac{3}{25}=\frac{3}{5}$$

132 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$
$$\therefore\ \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

133 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$에서
$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$
$3\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{15}$
이때 두 사건 A^C, B는 서로 배반사건이므로
$$\mathrm{P}(A^C\cup B)=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{2}{15}=\frac{11}{15}$$
$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}((A^C\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A^C\cup B)$$
$$=1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$$

134 뽑힌 대표 중에서 적어도 한 명이 여학생인 사건을 A라 하면 A^C는 4명이 모두 남학생인 사건이므로
$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{5}{126}$$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{126}=\frac{121}{126}$$

135 지애와 정아 사이에 적어도 한 명의 학생을 세우는 사건을 A라 하면 A^C는 지애와 정아를 이웃하게 세우는 사건이므로
$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{4!\times2!}{5!}=\frac{2}{5}$$ …… ㉮
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$
이므로 $p=5$, $q=3$ …… ㉯
$\therefore\ p+q=8$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 지애와 정아 사이에 적어도 한 명의 학생을 세우는 사건을 A라 하고 $\mathrm{P}(A^C)$ 구하기	50%
㉯ p, q의 값 구하기	40%
㉰ $p+q$의 값 구하기	10%

136 3문제 이하로 맞히는 사건을 A라 하면 A^C는 4문제를 맞히거나 모두 맞히는 사건이다.
(i) 4문제를 맞힐 확률은 $\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_2\Pi_5}=\frac{5}{32}$
(ii) 모두 맞힐 확률은 $\frac{{}_5\mathrm{C}_5}{{}_2\Pi_5}=\frac{1}{32}$
(i), (ii)에서
$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$$

137 A가 문제를 맞히는 사건을 A, B가 문제를 맞히는 사건을 B라 하면 두 명 중에서 한 명만 문제를 맞힐 확률이 0.6이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B)=0.6$
이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=0.3$이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)-0.3=0.6$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=0.9$
따라서 구하는 확률은

03 확률의 뜻과 활용

$\mathrm{P}(A^C \cap B^C) = \mathrm{P}((A \cup B)^C) = 1 - \mathrm{P}(A \cup B)$
$= 1 - 0.9 = 0.1$

138 같은 숫자가 적힌 카드가 2장 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 세 장의 카드에 적힌 숫자가 모두 다른 사건이다.
세 장의 카드에 적힌 숫자가 모두 다르려면 1, 2, 3, 4 중 세 개의 숫자를 택하고, 각 숫자가 적힌 3장 중 1장씩 카드를 택해야 하므로

$$\mathrm{P}(A^C) = \frac{{}_4\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \frac{27}{55}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C) = 1 - \frac{27}{55} = \frac{28}{55}$$

실력 완성 1등급 문제

pp. 40~42

139 ②	140 $\frac{13}{18}$	141 ④	142 11	143 ③
144 ④	145 ①	146 ②	147 ②	148 $\frac{17}{21}$
149 19	150 ②	151 ②	152 ⑤	

139 **시행과 사건**

전략 $0 < \mathrm{P}(A) < \mathrm{P}(B)$를 만족시키는 $n(A)$의 값에 따른 $n(B)$의 값을 구한다.

풀이 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로
$A \cap B = \varnothing$, $n(A) + n(B) \le 6$
이때 $0 < \mathrm{P}(A) < \mathrm{P}(B)$이므로 $0 < n(A) < n(B)$
$\therefore n(A) = 1$ 또는 $n(A) = 2$
(i) $n(A) = 1$이면 $1 < n(B) \le 5$에서
$n(B) = 2$ 또는 $n(B) = 3$ 또는 $n(B) = 4$ 또는 $n(B) = 5$
즉, 두 사건 A, B를 선택하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{C}_1 \times ({}_5\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_4 + {}_5\mathrm{C}_5) = 156$
(ii) $n(A) = 2$이면 $2 < n(B) \le 4$에서
$n(B) = 3$ 또는 $n(B) = 4$
즉, 두 사건 A, B를 선택하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{C}_2 \times ({}_4\mathrm{C}_3 + {}_4\mathrm{C}_4) = 75$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$156 + 75 = 231$

140 **수학적 확률**

전략 판별식을 이용하여 이차방정식이 실근을 가질 조건을 구한다.

풀이 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는
$6 \times 6 = 36$
이차방정식 $ax^2 - 8x + b = 0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = (-4)^2 - ab \ge 0 \qquad \therefore ab \le 16$$

주사위의 눈의 수 a, b가 $ab \le 16$을 만족시키는 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$,
$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(2, 6)$,
$(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$,
$(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$,
$(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$,
$(6, 1)$, $(6, 2)$
의 26가지이다.
따라서 구하는 확률은

$$\frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

다른풀이 주사위의 눈의 수 a, b가 $ab > 16$을 만족시키는 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면
$(6, 6)$, $(6, 5)$, $(6, 4)$, $(6, 3)$, $(5, 6)$, $(5, 5)$, $(5, 4)$,
$(4, 6)$, $(4, 5)$, $(3, 6)$
의 10가지이므로 그 확률은

$$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

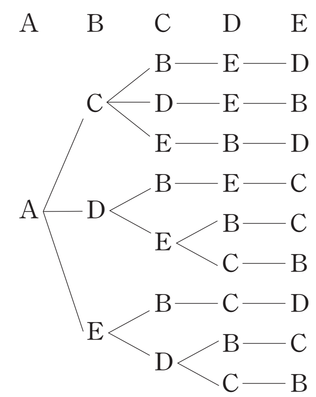
따라서 구하는 확률은

$$1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

141 **수학적 확률**

전략 수형도를 이용하여 한 학생만 자신의 성적표를 택하는 경우를 구한다.

풀이 5명의 학생이 5개의 성적표 중 한 장씩 택하는 모든 경우의 수는
$5! = 120$
5명의 학생을 A, B, C, D, E라 하면 A학생만 자신의 성적표를 택하고 나머지 네 학생은 다른 학생의 성적표를 택하는 경우는 다음과 같이 9가지이다.



같은 방법으로 학생 B, C, D, E가 각각 자신의 성적표를 택하고 나머지 네 학생이 다른 학생의 성적표를 택하는 경우도 각각 9가지씩이다.
즉, 한 학생만 자신의 성적표를 택하는 경우의 수는
$9 \times 5 = 45$
따라서 구하는 확률은

$$\frac{45}{120} = \frac{3}{8}$$

1등급 비법
규칙성을 찾기 어려운 경우의 수를 구할 때 수형도를 이용하면 중복되지 않고 빠짐없이 모든 경우를 구할 수 있다.

142 수학적 확률

전략 갑과 을이 꺼낸 카드에 적힌 수가 서로 같은 경우와 서로 다른 경우에 대하여 두 수의 합이 같은 경우를 생각해 본다.

풀이 갑과 을이 두 장의 카드를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 36$

(i) 갑과 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수가 각각 같은 경우의 수는

${}_4C_2 = 6$

(ii) 갑은 1과 4가 적힌 카드를 꺼내고 을은 2와 3이 적힌 카드를 꺼내거나, 갑은 2와 3이 적힌 카드를 꺼내고 을은 1과 4가 적힌 카드를 꺼내는 경우의 수는 2

(i), (ii)에서 카드에 적힌 수의 합이 같은 경우의 수는

$6+2=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$이므로

$p=9,\ q=2$

$\therefore\ p+q=11$

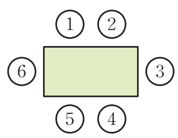
143 수학적 확률

전략 남학생이 앉는 자리에 따라 여학생이 앉을 수 있는 자리가 결정되므로 우선 남학생이 앉을 자리를 정한다.

풀이 6명의 학생이 직사각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는 6명을 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 3가지씩 존재하므로

$(6-1)! \times 3 = 5! \times 3 = 360$

남학생과 여학생이 마주 보고 앉으려면 오른쪽 그림에서 남학생은 ①, ⑤ 중 하나, ②, ④ 중 하나, ③, ⑥ 중 하나에 앉고 나머지의 자리에 여학생이 앉으면 된다.



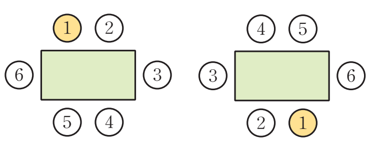
남학생이 앉을 자리를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 = 8$

그 각각에 대하여 남학생, 여학생이 앉는 경우의 수는

$3! \times 3! = 36$

이때 다음 그림과 같이 회전하여 일치하는 경우가 2가지씩 존재한다.



즉, 남학생과 여학생이 마주 보고 앉는 경우의 수는

$8 \times 36 \times \frac{1}{2} = 144$

따라서 구하는 확률은

$\frac{144}{360}=\frac{2}{5}$

144 수학적 확률

전략 먼저 3학년 학생 3명을 일렬로 세운 후, 같은 학년 학생끼리 서로 이웃하지 않도록 세우는 방법을 생각한다.

풀이 6명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$6! = 720$

(i) 3학년 학생 3명을 일렬로 세우고, 3학년 학생 사이사이에 2학년 학생 2명을 세운 후, 5명 사이사이와 양 끝에 1학년 학생 1명을 세우는 방법의 수는

√ $\boxed{3}$ √ $\boxed{2}$ √ $\boxed{3}$ √ $\boxed{2}$ √ $\boxed{3}$ √

$3! \times 2! \times {}_6C_1 = 72$

(ii) 3학년 학생 3명을 일렬로 세우고, 3학년 학생 사이사이에 2학년 학생 1명과 1학년 학생 1명을 세운 후, 5명의 양 끝에 2학년 학생 1명을 세우는 방법의 수는

√ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ √

√ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ √

$3! \times ({}_2C_1 \times 2!) \times {}_2C_1 = 48$

(i), (ii)에서 같은 학년 학생끼리 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수는

$72+48=120$

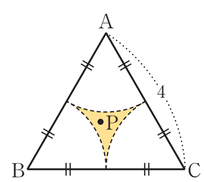
따라서 구하는 확률은

$\frac{120}{720}=\frac{1}{6}$

145 기하적 확률

전략 각 꼭짓점까지의 거리가 2인 점 P의 위치를 찾는다.

풀이 점 P가 정삼각형의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 부채꼴의 호 위에 있을 때 점 P에서 그 꼭짓점까지의 거리가 2이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 각 꼭짓점까지의 거리가 2보다 크다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\triangle \mathrm{ABC}\text{의 넓이})}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2-3\left(\pi \times 2^2 \times \frac{60}{360}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2}$$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

146 확률의 덧셈정리

전략 확률의 덧셈정리와 확률의 성질을 이용하여 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 범위를 구한다.

풀이 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{3}{4}+\frac{3}{7}-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{33}{28}-\mathrm{P}(A\cup B)$ …… ㉠

이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최소일 때 $\mathrm{P}(A\cap B)$는 최대이고 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대일 때 $\mathrm{P}(A\cap B)$는 최소이다.

이때

$\mathrm{P}(A\cup B)\ge \mathrm{P}(A),\ \mathrm{P}(A\cup B)\ge \mathrm{P}(B),\ \mathrm{P}(A\cup B)\le 1$

이므로

$P(A\cup B)\ge\frac{3}{4}$, $P(A\cup B)\ge\frac{3}{7}$, $P(A\cup B)\le1$

따라서 $\frac{3}{4}\le P(A\cup B)\le1$이므로

$-1\le -P(A\cup B)\le -\frac{3}{4}$

$\frac{5}{28}\le\frac{33}{28}-P(A\cup B)\le\frac{3}{7}$

$\therefore \frac{5}{28}\le P(A\cap B)\le\frac{3}{7}$ ($\because$ ㉠)

즉, $M=\frac{3}{7}$, $m=\frac{5}{28}$이므로

$M+m=\frac{17}{28}$

147 **확률의 덧셈정리 ⊕ 여사건의 확률**

전략 6과 서로소이려면 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니어야 함을 이용한다.

풀이 꺼낸 공에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{33}{100}$, $\underbrace{P(A\cap B)}_{6\text{의 배수인 사건}}=\frac{16}{100}=\frac{4}{25}$

이므로

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{33}{100}-\frac{4}{25}=\frac{67}{100}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)$$
$$=1-P(A\cup B)$$
$$=1-\frac{67}{100}=\frac{33}{100}$$

148 **여사건의 확률**

전략 50원짜리 동전의 개수를 기준으로 경우를 나눈다.

풀이 꺼낸 동전의 금액의 합이 250원 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 꺼낸 동전의 금액의 합이 250원 미만인 사건이다.

(i) 50원짜리 동전 3개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{1}{21}$

(ii) 50원짜리 동전 2개, 100원짜리 동전 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_9C_3}=\frac{1}{7}$

(i), (ii)에서

$P(A^C)=\frac{1}{21}+\frac{1}{7}=\frac{4}{21}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{4}{21}=\frac{17}{21}$

오답 피하기 꺼낸 동전의 금액의 합이 250원 미만이려면 500원짜리 동전은 한 개도 꺼내면 안 되므로 꺼낸 3개의 동전은 50원짜리와 100원짜리로만 이루어져야 한다.
이때 50원짜리 동전을 1개 꺼내는 경우, 다른 두 개의 동전이 100원짜리이어야 하는데 금액의 합이 250원이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 꺼낸 동전의 금액의 합이 250원 미만인 경우는 50원짜리 동전 3개를 꺼내는 경우 또는 50원짜리 동전 2개, 100원짜리 동전 1개를 꺼내는 경우이다.

149 **여사건의 확률**

전략 순서쌍 (x, y, z)가 $(x-y)(y-z)(z-x)\ne0$을 만족시키는 사건은 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 사건의 여사건임을 이용한다.

풀이 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$

x, y, z가 $(x-y)(y-z)(z-x)\ne0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 A^C는 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 사건이다.

이때 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립하려면

$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$

$x=y$일 때, $x+y+z=10$을 만족시키는 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)는

$(0, 0, 10)$, $(1, 1, 8)$, $(2, 2, 6)$,
$(3, 3, 4)$, $(4, 4, 2)$, $(5, 5, 0)$

의 6개이고, 어느 경우에도 $x=y=z$를 만족시키는 경우는 없다.

또, $y=z$, $z=x$일 때의 순서쌍의 개수도 마찬가지로 6이다.

즉, $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$6\times3=18$

$\therefore P(A^C)=\frac{18}{66}=\frac{3}{11}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$

이므로 $p=11$, $q=8$

$\therefore p+q=19$

다른풀이 $(x-y)(y-z)(z-x)\ne0$에서

$x\ne y$, $y\ne z$, $z\ne x$

이므로 합이 10인 음이 아닌 세 정수는

$\{0, 1, 9\}$, $\{0, 2, 8\}$, $\{0, 3, 7\}$, $\{0, 4, 6\}$,
$\{1, 2, 7\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$

의 8개이다.

이때 x, y, z를 결정하는 경우의 수는 $3!$이므로

$x+y+z=10$을 만족시키는 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$8\times3!=48$

따라서 구하는 확률은

$\frac{48}{{}_3H_{10}}=\frac{8}{11}$

이므로 $p=11$, $q=8$

$\therefore p+q=19$

150 **확률의 덧셈정리 + 여사건의 확률**

전략 적어도 한 명의 1학년 학생이 뽑히는 사건을 A, 적어도 한 명의 여학생이 뽑히는 사건을 B라 하고 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$를 각각 구한 후, $A^C \cap B^C$는 2명 모두 2학년 남학생이 뽑히는 사건임을 이용한다.

풀이 적어도 한 명의 1학년 학생이 뽑히는 사건을 A라 하면 A^C는 2명 모두 2학년이 뽑히는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$

적어도 한 명의 여학생이 뽑히는 사건을 B라 하면 B^C는 2명 모두 남학생이 뽑히는 사건이므로

$\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$

이때 $A^C \cap B^C$는 2명 모두 2학년 남학생이 뽑히는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C \cap B^C)=\dfrac{{}_{6}\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{8}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A \cup B)&=1-\mathrm{P}((A \cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C \cap B^C)\\&=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A \cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A \cap B)$에서

$\dfrac{7}{8}=\dfrac{5}{8}+\dfrac{5}{8}-\mathrm{P}(A \cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A \cap B)=\dfrac{3}{8}$

151 **수학적 확률**

1단계 세 수의 곱을 3으로 나누었을 때의 나머지가 2가 되는 경우를 파악한다.

$2, 2^2, 2^3, \cdots$을 3으로 나누었을 때의 나머지는 다음과 같다.

2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	$\cdots$
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
2	1	2	1	2	1	$\cdots$

따라서 세 수의 곱을 3으로 나누었을 때의 나머지가 2가 되는 경우는 세 수의 곱을 2의 거듭제곱으로 나타내었을 때 2의 지수가 홀수일 때이다.

2단계 세 수를 택하는 모든 경우의 수와 2의 지수가 홀수인 경우의 수를 각각 구한다.

각 가로줄에서 임의로 한 개씩 세 수를 택하는 모든 경우의 수는

$3\times3\times3=27$

첫 번째 가로줄에서 택한 수를 2^a $(a=1, 2, 3)$,

두 번째 가로줄에서 택한 수를 2^b $(b=4, 5, 6)$,

세 번째 가로줄에서 택한 수를 2^c $(c=7, 8, 9)$이라 하면

$2^a\times2^b\times2^c=2^{a+b+c}$에서 $a+b+c$가 홀수가 되는 경우는

(홀수, 홀수, 홀수), (홀수, 짝수, 짝수),

(짝수, 홀수, 짝수), (짝수, 짝수, 홀수)

(i) a가 홀수, b가 홀수, c가 홀수인 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times1\times{}_2\mathrm{C}_1=4$

(ii) a가 홀수, b가 짝수, c가 짝수인 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times1=4$

(iii) a가 짝수, b가 홀수, c가 짝수인 경우의 수는

$1\times1\times1=1$

(iv) a가 짝수, b가 짝수, c가 홀수인 경우의 수는

$1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=4$

이상에서 택한 세 수의 곱을 3으로 나누었을 때의 나머지가 2가 되는 경우의 수는

$4+4+1+4=13$

3단계 세 수의 곱을 3으로 나누었을 때의 나머지가 2가 될 확률을 구한다.

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{13}{27}$

152 **여사건의 확률**

1단계 두 조건을 이용하여 합성함수 $g\circ f$의 개수를 구한다.

조건 (가)에서 함수 f는 집합 Y의 원소 3개 중에서 2개를 택한 후, 크기가 작은 수부터 차례대로 집합 X의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 그 개수는

${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

조건 (나)에서 함수 g는 집합 Z의 원소 2개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후, 집합 Y의 원소에 대응시킨 다음 치역이 $\{0\}$뿐이거나 $\{1\}$뿐인 경우를 제외하면 되므로 그 개수는

${}_2\Pi_3-2=6$

따라서 합성함수 $g\circ f$의 개수는

$3\times6=18$

2단계 합성함수 $g\circ f$ 중에서 치역이 Z가 아닌 경우를 찾는다.

합성함수 $g\circ f$의 치역이 Z인 사건을 A라 하면 A^C는 치역이 $\{0\}$ 또는 $\{1\}$인 사건이다.

(i) 치역이 $\{0\}$인 경우

$f(1)=a, f(2)=b$ $(a\neq b)$라 하면

$g(a)=0, g(b)=0, g(c)=1$ $(c\neq a, c\neq b)$

이어야 하므로 치역이 $\{0\}$인 $g\circ f$의 개수는

${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

→ $f(1)$과 $f(2)$의 값이 정해지면 함수 g가 하나로 정해진다.

(ii) 치역이 $\{1\}$인 경우

$f(1)=a, f(2)=b$ $(a\neq b)$라 하면

$g(a)=1, g(b)=1, g(c)=0$ $(c\neq a, c\neq b)$

이어야 하므로 치역이 $\{1\}$인 $g\circ f$의 개수는

${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

(i), (ii)에서 치역이 Z가 아닌 $g\circ f$의 개수는

$3+3=6$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$

3단계 여사건의 확률을 이용하여 합성함수 $g\circ f$의 치역이 Z일 확률을 구한다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

04 조건부확률

교과서에서 뽑은 기본 문제 p. 43

153 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{2}{5}$ **154** (1) 독립 (2) 종속
155 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{8}$

153 (1) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$

(2) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$

154 (1) $P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$
따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.
(2) $P(A)P(B)=0.6\times0.5=0.3$, $P(A\cap B)=0.2$이므로
$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$
따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

1등급 비법
두 사건 A, B가 서로 독립인지 종속인지 확인하려면 $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$를 각각 구한 후, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$가 성립하는지 조사하면 된다. 이때 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이면 서로 독립이고, $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$이면 서로 종속이다.

155 (1) $A=\{1, 2, 4\}$이므로
$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
(2) 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은
${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$

유형 분석 기출 문제 pp. 44~50

156 ①	**157** $\frac{3}{10}$	**158** ②	**159** ③	**160** $\frac{3}{5}$
161 ③	**162** ①	**163** $\frac{6}{7}$	**164** ②	**165** ③
166 ②	**167** ⑤	**168** $\frac{2}{5}$	**169** ③	**170** ①
171 $\frac{3}{4}$	**172** ③	**173** $\frac{9}{13}$	**174** ②	**175** ③
176 ④	**177** $\frac{1}{3}$	**178** ①	**179** ②	**180** ②
181 $\frac{13}{25}$	**182** 260	**183** $\frac{80}{243}$	**184** ⑤	**185** ③
186 280	**187** ②	**188** ③	**189** 43	

156 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로
$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
$=\frac{9}{16}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{16}$
$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{9}{16}}=\frac{1}{9}$

157 $P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ …… ㉮
두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로
$A\cap B=\varnothing$
따라서 $A\cap B^C=A-B=A$이므로
$P(A\cap B^C)=P(A)=\frac{1}{5}$ …… ㉯
$\therefore P(A|B^C)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $P(B^C)$ 구하기	30%
㉯ $P(A\cap B^C)$ 구하기	40%
㉰ $P(A|B^C)$ 구하기	30%

개념 보충
$A\cap B=\varnothing$과 같은 표현
$A\cap B=\varnothing \Longleftrightarrow A-B=A \Longleftrightarrow B-A=B$
$\Longleftrightarrow A\subset B^C \Longleftrightarrow B\subset A^C$

158 여학생을 택하는 사건을 A, 버스로 등교하는 학생을 택하는 사건을 B라 하면
$P(A)=\frac{4}{7}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{9}$
따라서 구하는 확률은
$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{7}}=\frac{7}{18}$

159 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면
$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $A\cap B=\{2\}$
$\therefore P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$
따라서 구하는 확률은
$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

다른풀이 구하는 확률은 짝수의 눈 중에서 소수의 눈을 택할 확률과 같으므로
$\frac{1}{3}$

1등급 비법

각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대되는 표본 공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

즉, 두 사건 A, $A\cap B$가 일어나는 경우의 수를 이용하여 구할 수 있다.

160 상자에서 빨간색 카드를 꺼내는 사건을 A, 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{9}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}$$

다른풀이 구하는 확률은 빨간색 카드 중에서 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률과 같으므로

$\frac{3}{5}$

161 승무원을 체험한 학생을 택하는 사건을 A, 여학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{36}{60}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{25}{60}=\frac{5}{12}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{3}{5}}=\frac{25}{36}$$

다른풀이 구하는 확률은 승무원을 체험한 전체 학생 중에서 여학생을 택할 확률과 같으므로

$\frac{25}{36}$

162 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(B)=3\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{5}$에서

$\mathrm{P}(A)=5\mathrm{P}(A\cap B)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{4}{7}=5\mathrm{P}(A\cap B)+3\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\frac{4}{7}=7\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{49}$

163 뽑은 제비 중 당첨 제비가 있는 사건을 A, 2등 당첨 제비가 포함되어 있는 사건을 B라 하자.

이때 당첨 제비가 있는 사건은 뽑은 제비 2개가 모두 당첨 제비가 아닌 사건의 여사건이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

또, 2등 당첨 제비가 있는 사건은 뽑은 제비 2개가 모두 2등 당첨 제비가 아닌 사건의 여사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=1-\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{9}}=\frac{6}{7}$$

다른풀이 10개의 제비 중에서 임의로 2개의 제비를 뽑을 때,

(i) 1등 당첨 제비 1개, 2등 당첨 제비 0개가 나오는 경우의 수는

${}_1\mathrm{C}_1\times\boxed{{}_5\mathrm{C}_1}=5$ 제비를 2개 뽑아야 하므로 당첨 제비가 아닌 제비 중에서 하나를 뽑아야 한다.

(ii) 1등 당첨 제비 0개, 2등 당첨 제비 1개가 나오는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1=20$

(iii) 1등 당첨 제비 1개, 2등 당첨 제비 1개가 나오는 경우의 수는

${}_1\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=4$

(iv) 1등 당첨 제비 0개, 2등 당첨 제비 2개가 나오는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

이상에서 당첨 제비가 나오는 경우의 수는

$5+20+4+6=35$

이고 그중 2등 당첨 제비가 포함되는 경우의 수는

$20+4+6=30$

따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$

164 갑과 을이 이웃하여 서는 사건을 A, 을과 병이 이웃하여 서는 사건을 B라 하자.

갑, 을 두 명을 하나로 묶어서 생각하여 9명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $9!$이고, 갑과 을이 자리를 바꾸는 경우는 2가지이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{9!\times2}{10!}=\frac{1}{5}$

갑, 을, 병 세 명을 하나로 묶어서 생각하여 8명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $8!$이고, 갑과 을이 이웃하면서 을과 병이 이웃하여 서는 경우는 오른쪽과 같이 2가지이므로

(i) 갑 을 병
(ii) 병 을 갑

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8!\times2}{10!}=\frac{1}{45}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{45}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{9}$$

165 체험 학습 B를 선택한 학생을 택하는 사건을 A, 남학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}$ …… ㉠

한편, 여학생의 수를 a라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{360-90-70}{360}=\frac{200}{360}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{360-a-90}{360}=\frac{270-a}{360}$

이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{270-a}{360}}{\frac{200}{360}}=\frac{270-a}{200}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{2}{5}=\frac{270-a}{200}$, $270-a=80$

$\therefore a=190$

따라서 이 학교의 여학생의 수는 190이다.

다른풀이 체험 학습 B를 선택한 남학생의 수를 a라 하고 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
체험 학습 A	90	70	160
체험 학습 B	a		200
합계			360

임의로 뽑은 1명의 학생이 체험 학습 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률이 $\frac{2}{5}$이므로

$\frac{a}{200}=\frac{2}{5}$ $\therefore a=80$

따라서 체험 학습 B를 선택한 여학생의 수는

$200-80=120$

이므로 이 학교의 여학생의 수는

$70+120=190$

166 첫 번째에 딸기 맛 사탕을 먹는 사건을 A, 두 번째에 포도 맛 사탕을 먹는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{7}$, $\mathrm{P}(B|A)=\boxed{\frac{4}{6}}=\frac{2}{3}$

남은 사탕은 모두 6개이고 그중 포도 맛 사탕은 4개이다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{7}$

167 갑이 당첨 복권이 아닌 것을 뽑는 사건을 A, 을이 당첨 복권을 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{12-n}{12}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{11}$

이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{12-n}{12}\times\frac{n}{11}=\frac{n(12-n)}{132}$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{44}$이므로

$\frac{n(12-n)}{132}=\frac{9}{44}$

$n^2-12n+27=0$, $(n-3)(n-9)=0$

$\therefore n=3$ 또는 $n=9$

따라서 모든 n의 값의 합은

$3+9=12$

168 A가 소수가 적힌 구슬을 꺼내는 사건을 A, B가 소수가 적힌 구슬을 꺼내는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{4}{9}$ …… ㉮

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{5}$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ A, B가 소수가 적힌 구슬을 꺼내는 사건을 각각 A, E라 할 때, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A^C)$, $\mathrm{P}(E|A)$, $\mathrm{P}(E|A^C)$ 구하기	50%
㉯ $\mathrm{P}(E)$ 구하기	50%

169 내일 비가 내리는 사건을 A, 축구팀이 내일 경기에서 이기는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(A^C)=1-0.4=0.6$

$\mathrm{P}(E|A)=0.3$, $\mathrm{P}(E|A^C)=0.5$

따라서 축구팀이 내일 경기에서 이길 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$

$=0.4\times0.3+0.6\times0.5=0.42$

170 5번째까지 시행을 한 후 시행을 멈추려면 4번째 시행까지는 홀수가 적힌 공 2개, 짝수가 적힌 공 2개를 꺼내고 5번째 시행에서 짝수가 적힌 공을 꺼내야 한다.

4번째 시행까지 홀수, 홀수, 짝수, 짝수를 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

위의 6가지 경우 중 (홀수, 짝수, 홀수, 짝수)의 순서대로 공을 꺼낼 확률은

$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{35}$

같은 방법으로 나머지 5가지의 배열에 대해서도 확률은 각각 $\frac{3}{35}$이다.

4번째 시행까지 홀수가 적힌 공 2개, 짝수가 적힌 공 2개를 꺼내는 사건을 A, 5번째 시행에서 짝수가 적힌 공을 꺼내는

사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=6\times\frac{3}{35}=\frac{18}{35}$, $\mathrm{P}(B|A)=\boxed{\frac{1}{3}}$

└ 남은 공은 총 3개이고 그중 짝수가 적힌 공은 1개이다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{18}{35}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{35}$

171 기계 A에서 생산된 제품을 택하는 사건을 A, 불량품을 택하는 사건을 E라 하면 기계 B에서 생산된 제품을 택하는 사건이 A^C이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=0.4\times0.01=0.004$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=0.6\times0.02=0.012$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=0.004+0.012=0.016$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C|E)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.012}{0.016}=\frac{3}{4}$

172 필통 A를 택하는 사건을 A, 빨간 펜 1개, 파란 펜 1개를 꺼내는 사건을 E라 하면 필통 B를 택하는 사건이 A^C이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_6\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{30}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\frac{4}{15}+\frac{7}{30}=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{2}}=\frac{8}{15}$

참고 두 필통 A, B 중에서 A 필통을 택할 확률은 $\frac{1}{2}$이고 B 필통을 택할 확률도 $\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$이다.

173 흰색 모자를 꺼내는 사건을 A, 노란색 모자라고 대답하는 사건을 E라 하면 노란색 모자를 꺼내는 사건이 A^C이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{40}{100}=\frac{4}{25}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$

$=\frac{3}{5}\times\frac{60}{100}=\frac{9}{25}$ ······ ㉮

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\frac{4}{25}+\frac{9}{25}=\frac{13}{25}$ ······ ㉯

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C|E)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{9}{25}}{\frac{13}{25}}=\frac{9}{13}$ ······ ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 흰색 모자를 꺼내는 사건, 노란색 모자라고 대답하는 사건을 각각 A, E라 할 때, $\mathrm{P}(A\cap E)$, $\mathrm{P}(A^C\cap E)$ 구하기	40%
㉯ $\mathrm{P}(E)$ 구하기	30%
㉰ $\mathrm{P}(A^C\|E)$ 구하기	30%

174 성재가 가위를 내는 사건을 A, 바위를 내는 사건을 B, 보를 내는 사건을 C, 성재가 이기는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=0.3\times0.4=0.12$

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=0.4\times0.2=0.08$

$\mathrm{P}(C\cap E)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)=0.3\times0.4=0.12$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$

$=0.12+0.08+0.12=0.32$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.12}{0.32}=\frac{3}{8}$

175 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

또, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{4}{5}$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{4}{5}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{7}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$

다른풀이 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=\frac{2}{3}\{1-\mathrm{P}(B)\}=\frac{1}{5}$

$1-\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$

개념 보충

사건의 독립(1)

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립임을 확인해 보자.

두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}$

$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

즉, 두 사건 A^C, B^C는 서로 독립이다.

176 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $C=\{3, 4\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(C\cap A)=\frac{1}{6}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(B\cap C)$이므로 두 사건 B와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(C\cap A)$이므로 두 사건 C와 A는 서로 독립이다.

이상에서 서로 독립인 사건은 ㄴ, ㄷ이다.

177 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{2}{3}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{12}$

$\therefore \alpha=\frac{1}{12}$ …… ㉮

두 사건 A와 B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)$, $\frac{1}{3}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

$\therefore \beta=\frac{1}{4}$ …… ㉯

$\therefore \alpha+\beta=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ α의 값 구하기	40%
㉯ β의 값 구하기	40%
㉰ $\alpha+\beta$의 값 구하기	20%

178 ① 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)$이므로

$\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=1$

② 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq0$, $\mathrm{P}(B)\neq0$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉, 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다.

③ 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A-B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\end{aligned}$$

즉, 두 사건 A, B^C는 서로 독립이다.

④ 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A|B)$와 $\mathrm{P}(B|A)$가 항상 같은 것은 아니다.

⑤ 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C와 B, A^C와 B^C는 모두 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\mathrm{P}(A^C)$

$1-\mathrm{P}(A^C|B)=1-\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(A)$

이때 $\mathrm{P}(A^C|B^C)$와 $1-\mathrm{P}(A^C|B)$가 항상 같은 것은 아니다.

따라서 옳은 것은 ①이다.

개념 보충

사건의 독립(2)

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립임을 확인해 보자.

두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(B-A)\\&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

즉, 두 사건 A^C, B는 서로 독립이다.

179 두 선수 A, B가 페널티킥을 성공시키는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}p$

또, 두 선수 A, B 중 적어도 한 명이 페널티킥을 성공시킬 확률이 $\frac{13}{25}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{13}{25}$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{13}{25}=\frac{2}{5}+p-\frac{2}{5}p$, $\frac{3}{5}p=\frac{3}{25}$

$\therefore p=\frac{1}{5}$

다른풀이 두 선수 A, B가 페널티킥을 성공시키는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 두 선수 A, B가 모두 페널티킥을 성공시키지 못할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\\&=\left(1-\frac{2}{5}\right)(1-p)\\&=\frac{3}{5}(1-p)\end{aligned}$$ …… ㉠

A, B가 서로 독립이므로 A^C, B^C도 서로 독립이다.

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{13}{25}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\frac{13}{25}=\frac{12}{25}\end{aligned}$$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{3}{5}(1-p)=\frac{12}{25}$, $1-p=\frac{4}{5}$

$\therefore p=\frac{1}{5}$

180 전기 회로에서 P, Q 사이에 전기가 흐르려면 두 스위치 a, b가 모두 닫히거나 스위치 c가 닫혀야 한다. 이때 각 스위치가 열릴 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 각 스위치가 닫힐 확률은

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

두 스위치 a, b가 모두 닫히는 사건을 A, 스위치 c가 닫히는 사건을 B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-\frac{8}{27}=\frac{22}{27}$

181 두 수의 합이 홀수이려면 두 수 중에서 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수이어야 한다.

두 상자 A, B에서 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

(i) A 상자에서 홀수, B 상자에서 짝수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

(ii) A 상자에서 짝수, B 상자에서 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{4}{25}+\frac{9}{25}=\frac{13}{25}$

182 전체 학생 480명 중 1학년 학생을 택하는 사건을 A, 체험 학습 실시에 찬성하는 학생을 택하는 사건을 B라 하고 1학년 학생 중 체험 학습 실시에 찬성하는 학생을 x명이라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{120}{480}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{280}{480}=\frac{7}{12}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{480}$ …… ㉮

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{x}{480}=\frac{1}{4}\times\frac{7}{12}$ $\quad\therefore x=70$ …… ㉯

1학년 학생이 120명이므로

$70+a=120$에서 $a=50$

체험 학습 실시에 찬성하는 학생이 280명이므로

$70+b=280$에서 $b=210$

$\therefore a+b=260$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 1학년 학생을 택하는 사건, 체험 학습 실시에 찬성하는 학생을 택하는 사건을 각각 A, B라 할 때, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$ 구하기	20%
㉯ 1학년 학생 중에서 체험 학습 실시에 찬성하는 학생 수 구하기	50%
㉰ $a+b$의 값 구하기	30%

183 자유투를 한 번 던져 성공할 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 실패할 확률은

$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

따라서 5번의 자유투를 던져 3번 성공할 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$

184 한 개의 동전을 4번 던질 때 앞면이 적어도 한 번 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 뒷면이 4번 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

185 가영이가 문제를 맞힐 확률은 $\frac{4}{5}$

(i) 가영이가 2문제를 맞힐 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{48}{125}$

(ii) 가영이가 3문제를 맞힐 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^0=\frac{64}{125}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{48}{125}+\frac{64}{125}=\frac{112}{125}$

186 한 번의 가위바위보에서 성희가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$ …… ㉮

성희가 이긴 횟수를 x라 하면 비기거나 진 횟수는 $(7-x)$이다.

성희가 5계단을 올라가게 되므로

$2x-(7-x)=5$, $3x=12$

$\therefore x=4$ …… ㉯

따라서 구하는 확률은

${}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{280}{3^7}$

이므로 $n=280$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 성희가 이길 확률 구하기	20%
㉯ 성희가 이긴 횟수 구하기	40%
㉰ n의 값 구하기	40%

187 (i) 주머니에서 흰 구슬을 꺼내고 화살을 2번 쏘아 2번 모두 명중시킬 확률은

$\frac{3}{5}\times{}_2C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{3}{80}$

(ii) 주머니에서 검은 구슬을 꺼내고 화살을 3번 쏘아 2번 명중시킬 확률은

$\frac{2}{5}\times{}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{160}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{80}+\frac{9}{160}=\frac{3}{32}$

188 A선수가 이길 확률이 $\frac{3}{5}$이므로 B선수가 이길 확률은

$1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

다섯 번째 경기에서 승부가 결정되려면 우승하는 선수는 네 번째 경기까지 3번 이기고 1번 진 후, 다섯 번째 경기에서 이겨야 한다.

(i) A선수가 우승할 확률은

${}_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1\times\frac{3}{5}=\frac{648}{5^5}$

(ii) B선수가 우승할 확률은

${}_4C_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\frac{2}{5}=\frac{192}{5^5}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{648}{5^5}+\frac{192}{5^5}=\frac{168}{625}$

189 1개의 동전을 던져서 앞면이 나와도 x축의 방향으로 1만큼, 뒷면이 나와도 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하므로

$a=6$

이때 $0\le b\le 6$이므로 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우는

$b=0$ 또는 $b=3$ 또는 $b=6$

(i) $a=6$, $b=0$인 경우

1개의 동전을 6번 던져서 앞면만 6번 나와야 하고 그 확률은

${}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{64}$

(ii) $a=6$, $b=3$인 경우

1개의 동전을 6번 던져서 앞면과 뒷면이 각각 3번씩 나와야 하고 그 확률은

${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

(iii) $a=6$, $b=6$인 경우

1개의 동전을 6번 던져서 뒷면만 6번 나와야 하고 그 확률은

${}_6C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

이상에서 구하는 확률은

$\frac{1}{64}+\frac{5}{16}+\frac{1}{64}=\frac{11}{32}$

이므로 $p=32$, $q=11$

$\therefore p+q=43$

참고 동전을 1개 던져서 뒷면이 나올 때만 y축의 방향으로 1만큼 평행이동하므로 b는 뒷면이 나온 횟수를 의미하고, a는 동전을 던진 총횟수를 의미한다.

실력 완성 1등급 문제

pp. 51~53

190 ③	**191** 72	**192** A, C, B	**193** ②	**194** ⑤
195 ②	**196** ④	**197** ①	**198** ③	**199** 10
200 ③	**201** 41			

190 조건부확률

전략 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$를 간단히 정리한 후, 이 식의 값이 최대일 때와 최소일 때를 파악한다.

풀이 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$=\frac{P(A\cap B)}{0.7}$

$=\frac{10}{7}P(A\cap B)$

이므로 $P(A\cap B)$가 최대일 때 $P(B|A)$도 최대이고, $P(A\cap B)$가 최소일 때 $P(B|A)$도 최소이다.

(i) $B\subset A$일 때 $P(A\cap B)$는 최대이고, 최댓값은

$P(A\cap B)=P(B)=0.5$

$\therefore M=\frac{10}{7}\times 0.5=\frac{5}{7}$

(ii) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1$일 때

$P(A\cap B)$는 최소이고, 최솟값은

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-1$

$=0.7+0.5-1=0.2$

$\therefore m=\frac{10}{7}\times 0.2=\frac{2}{7}$

(i), (ii)에서

$M+m=\frac{5}{7}+\frac{2}{7}=1$

191 조건부확률

전략 30대가 차지하는 비율을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 세운 후, 두 조건부확률이 같음을 이용한다.

풀이 30대 이용자 수는

$(60-a)+b=60-a+b$

이고 도서관 이용자 300명 중에서 30대가 차지하는 비율이 12 %이므로

$\frac{60-a+b}{300}=\frac{12}{100}$

$60-a+b=36\qquad\therefore a-b=24$ ······ ㉠

도서관 이용자 300명 중에서 남성을 택하는 사건을 A, 20대를 택하는 사건을 B, 30대를 택하는 사건을 C라 하면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{a}{300}}{\frac{200}{300}}=\frac{a}{200}$$

$$\mathrm{P}(C|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\frac{b}{300}}{\frac{100}{300}}=\frac{b}{100}$$

이때 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(C|A^C)$이므로

$\frac{a}{200}=\frac{b}{100}$ $\quad\therefore a=2b$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=48,\ b=24$

$\therefore a+b=72$

192 **조건부확률**

전략 A, B, C에서 우산을 분실한 사건에 대한 조건부확률을 각각 구하여 그 값을 비교한다.

풀이 A, B, C에 가는 사건을 각각 A, B, C라 하고 우산을 분실하는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{4}}{\mathrm{P}(E)}$$

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{20}}{\mathrm{P}(E)}$$

$$\mathrm{P}(C|E)=\frac{\mathrm{P}(C\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{6}{25}}{\mathrm{P}(E)}$$

따라서 $\mathrm{P}(A|E)>\mathrm{P}(C|E)>\mathrm{P}(B|E)$이므로 A, C, B의 순서대로 가는 것이 합리적이다.

오답 피하기 A, B, C의 순서대로 방문하여 우산을 분실하였으므로 B에서 우산을 분실했다면 A에서는 우산을 분실하지 않은 것이다.

따라서 $\mathrm{P}(B\cap E)$를 구할 때, A에서 우산을 분실하지 않을 확률 $\frac{3}{4}$을 반드시 곱해야 한다.

같은 방법으로 C에서 우산을 분실했다면 A, B에서는 우산을 분실하지 않은 것이므로 $\mathrm{P}(C\cap E)$를 구할 때, $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}$를 반드시 곱해야 한다.

참고 우산을 분실할 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{20}+\frac{6}{25}=\frac{16}{25}$$

193 **조건부확률**

전략 꺼낸 네 장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수일 확률과 꺼낸 네 장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수이면서 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 홀수일 확률을 각각 구한다.

풀이 꺼낸 네 장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 홀수인 사건을 B라 하자.

꺼낸 네 장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수이려면 적어도 하나가 짝수이어야 하므로 A^C는 네 수가 모두 홀수인 사건이다.

이때 갑이 먼저 홀수가 적힌 카드를 두 장 꺼낸 다음, 을도 홀수가 적힌 카드를 두 장 꺼내야 하므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\boxed{\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}}=\frac{1}{42}$$

갑이 꺼낸 후 남은 카드는 8장이고
그중 홀수가 적힌 카드는 3장이다.

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{42}=\frac{41}{42}$$

한편, 꺼낸 네 장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수이면서 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 홀수일 확률은 다음과 같다.

(i) 갑이 홀수와 짝수가 적힌 카드를 한 장씩 꺼내고 을이 두 장 모두 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 경우

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{5}{42}$$

(ii) 갑이 두 장 모두 짝수가 적힌 카드를 꺼내고 을은 두 장 모두 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 경우

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{5}{63}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{42}+\frac{5}{63}=\frac{25}{126}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{25}{126}}{\frac{41}{42}}=\frac{25}{123}$$

194 **확률의 곱셈정리와 조건부확률**

전략 감기에 걸린 사람을 감기에 걸렸다고 진단할 확률과 감기에 걸리지 않은 사람을 감기에 걸렸다고 오진할 확률을 각각 구한다.

풀이 감기에 걸린 사람을 택하는 사건을 A, 의사가 감기에 걸렸다고 진단하는 사건을 E라 하면 감기에 걸리지 않은 사람을 택하는 사건이 A^C이므로

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$$
$$=0.3\times0.9=0.27$$

$$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$$
$$=0.7\times0.05=0.035$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$$
$$=0.27+0.035=0.305$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.27}{0.305}=\frac{54}{61}$$

195 **확률의 곱셈정리와 조건부확률**

전략 주사위 A, B, C에서 같은 수가 적힌 면이 나오는 사건에 대한 조건부확률을 각각 구한다.

풀이 주사위 A, B, C를 택하는 사건을 각각 A, B, C라 하고 주사위를 두 번 던졌을 때 두 번 모두 같은 수가 나오는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$$

5가 나올 확률

$$=\frac{1}{3}\times\left(\boxed{\frac{1}{3}}\times\frac{1}{3}+\boxed{\frac{2}{3}}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{27}$$

2가 나올 확률

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$

1이 나올 확률

$=\frac{1}{3}\times\left(\boxed{\frac{1}{3}}\times\frac{1}{3}+\boxed{\frac{2}{3}}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{27}$

4가 나올 확률

$\mathrm{P}(C\cap E)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)$

$=\frac{1}{3}\times(1\times1)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$

$=\frac{5}{27}+\frac{5}{27}+\frac{1}{3}=\frac{19}{27}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{5}{27}}{\frac{19}{27}}=\frac{5}{19}$$

196 **조건부확률 ⊕ 사건의 독립과 종속**

전략 두 사건 A, B에 대하여 $A\cap B=\varnothing$이면 A, B는 서로 배반사건이고, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면 A, B는 서로 독립임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $A_2=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, $A_4=\{4, 8, 12\}$,

$A_2\cap A_4=\{4, 8, 12\}$이므로

$\mathrm{P}(A_2)=\frac{7}{15}$, $\mathrm{P}(A_4)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$,

$\mathrm{P}(A_2\cap A_4)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A_4|A_2)=\frac{\mathrm{P}(A_2\cap A_4)}{\mathrm{P}(A_2)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{15}}=\frac{3}{7}$ (거짓)

ㄴ. $A_6=\{6, 12\}$, $A_8=\{8\}$이므로

$A_6\cap A_8=\varnothing$

따라서 두 사건 A_6과 A_8은 서로 배반사건이다. (참)

ㄷ. $A_3=\{3, 6, 9, 12, 15\}$, $A_5=\{5, 10, 15\}$,

$A_3\cap A_5=\{15\}$이므로

$\mathrm{P}(A_3)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A_5)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$,

$\mathrm{P}(A_3\cap A_5)=\frac{1}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(A_3\cap A_5)=\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(A_5)$이므로 두 사건 A_3과 A_5는 서로 독립이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

197 **조건부확률 ⊕ 독립시행의 확률**

전략 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 같은 경우와 다른 경우로 나눈 후, 각각의 경우가 일어날 확률을 구한다.

풀이 (i) 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 같은 경우

한 개의 동전을 4번 던져 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나올 확률은

$\frac{6}{36}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$

(ii) 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 다른 경우

한 개의 동전을 2번 던져 앞면과 뒷면이 각각 1번씩 나올 확률은

$\frac{30}{36}\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{12}$

동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같은 사건을 A, 동전을 4번 던지는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{16}+\frac{5}{12}=\frac{23}{48}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{23}{48}}=\frac{3}{23}$$

198 **독립시행의 확률**

전략 동전을 7번 던져서 꼭짓점 A에서 출발한 점 P가 꼭짓점 F에 도착할 때를 파악한다.

풀이 동전을 한 번 던지는 시행에서 점 P가 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향으로 움직일 확률과 시곗바늘이 도는 방향으로 움직일 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다.

앞면이 나올 확률

뒷면이 나올 확률

(i) 앞면이 0번, 뒷면이 7번 나올 확률은

${}_7\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{2^7}$

(ii) 앞면이 2번, 뒷면이 5번 나올 확률은

${}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{21}{2^7}$

(iii) 앞면이 4번, 뒷면이 3번 나올 확률은

${}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{35}{2^7}$

(iv) 앞면이 6번, 뒷면이 1번 나올 확률은

${}_7\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{7}{2^7}$

이상에서 구하는 확률은

$\frac{1}{2^7}+\frac{21}{2^7}+\frac{35}{2^7}+\frac{7}{2^7}=\frac{1}{2}$

참고 동전을 7번 던지는 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 x, 뒷면이 나오는 횟수를 y라 하고

(i) $\begin{cases}x+y=7\\-2x+y=7\end{cases}$ (ii) $\begin{cases}x+y=7\\-2x+y=1\end{cases}$

(iii) $\begin{cases}x+y=7\\-2x+y=-5\end{cases}$ (iv) $\begin{cases}x+y=7\\-2x+y=-11\end{cases}$

을 각각 연립하여 풀면 앞면과 뒷면이 나오는 횟수를 구할 수 있다.

199 **사건의 독립과 종속 ⊕ 독립시행의 확률**

전략 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{P}(A)$는 첫 번째 던진 동전이 앞면이 나올 확률이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B)$는 동전을 20번 던졌을 때 앞면이 k번 나올 확률이므로

$\mathrm{P}(B)={}_{20}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{20-k}={}_{20}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

$\mathrm{P}(A\cap B)$는 첫 번째 던진 동전이 앞면이 나오고, 남은 19번 중 앞면이 $(k-1)$번 나올 확률이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}\times{}_{19}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{19-(k-1)}$$
$$=\frac{1}{2}\times{}_{19}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$$\frac{1}{2}\times{}_{19}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{19}=\frac{1}{2}\times{}_{20}\mathrm{C}_{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$
$$2\times{}_{19}\mathrm{C}_{k-1}={}_{20}\mathrm{C}_{k}$$
$$2\times\frac{19!}{(k-1)!\times(19-k+1)!}=\frac{20!}{k!\times(20-k)!}$$
$$2=\frac{20}{k}\qquad\therefore k=10$$

200 확률의 곱셈정리

(1단계) 첫 번째에 A와 C가 마주 보고 앉지 않는 경우를 파악하여 각각의 경우의 확률을 구한다.

첫 번째에 A와 C가 마주 보고 앉지 않는 사건을 E, 두 번째에 A와 C가 마주 보고 앉는 사건을 F라 하자.

첫 번째에 A와 C가 마주 보고 앉지 않을 확률은 다음과 같다.

(i) A, B, C, D가 꺼낸 4개의 공 중에서 3개에 6의 약수가 적힌 경우

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_1\times4!}{{}_6\mathrm{P}_4}=\frac{8}{15}$$

(ii) A, B, C, D가 꺼낸 4개의 공 모두 6의 약수가 적힌 경우

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_4\times4!}{{}_6\mathrm{P}_4}=\frac{1}{15}$$

(iii) A, B, C, D가 꺼낸 4개의 공 중에서 6의 약수와 그 이외의 수가 각각 두 개씩 나왔지만 A와 C가 마주 보고 앉지 않는 경우

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times2!\times2!}{{}_6\mathrm{P}_4}=\frac{4}{15}$$

이상에서

$$\mathrm{P}(E)=\frac{8}{15}+\frac{1}{15}+\frac{4}{15}=\frac{13}{15}$$

(2단계) 첫 번째에 A와 C가 마주 보고 앉지 않았을 때 두 번째에 A와 C가 마주 보고 앉을 확률을 구한다.

첫 번째에 A와 C가 마주 보고 앉지 않았을 때 두 번째에 A와 C가 마주 보고 앉을 확률은

$$\mathrm{P}(F|E)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times2!\times2!}{{}_6\mathrm{P}_4}=\frac{1}{15}$$

(3단계) 네 사람 A, B, C, D가 공을 동시에 두 번째 꺼내어 원탁에 앉았을 때, 처음으로 원탁에 A와 C가 마주 보고 앉을 확률을 구한다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(E\cap F)=\mathrm{P}(E)\mathrm{P}(F|E)=\frac{13}{15}\times\frac{1}{15}=\frac{13}{225}$$

201 독립시행의 확률

(1단계) A 지점에서 출발한 바둑돌이 B 지점에 도달하기 위해 어떻게 움직여야 하는지 파악한다.

한 개의 주사위를 5번 던져 A 지점에 있던 바둑돌이 B 지점에 있으려면 오른쪽으로 2칸, 왼쪽으로 1칸, 위쪽으로 2칸 이동해야 한다.

(2단계) 각 주사위의 눈이 나올 확률을 구한 후, A 지점에서 출발한 바둑돌이 B 지점에 있을 확률을 구한다.

1 또는 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

3의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$

4 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$$\boxed{\frac{5!}{2!\times2!}}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{36}$$

오른쪽, 왼쪽, 위쪽으로 이동하는 것을 각각 같은 것으로 생각하여 같은 것이 있는 순열을 이용한다.

이므로 $p=36$, $q=5$

$\therefore p+q=41$

1등급 비법

1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 a, 사건 B가 일어날 확률을 b, 사건 C가 일어날 확률을 c라 할 때, 이 시행을 독립적으로 n회 반복하는 시행에서 A가 p회, B가 q회, C가 r회 일어날 확률은

$$\frac{n!}{p!\times q!\times r!}a^pb^qc^r\ (\text{단, } a+b+c=1,\ p+q+r=n)$$

실전 대비 마무리 문제 pp. 54~55

202 ①	203 ②	204 ③	205 ④	206 ②
207 $\frac{1}{15}$	208 종속	209 ④		

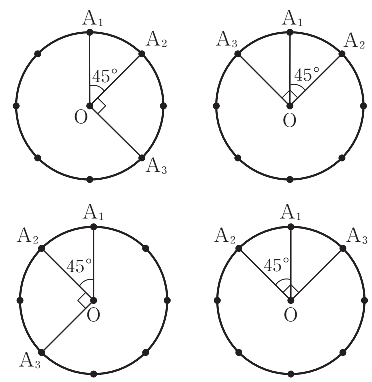
202 수학적 확률

전략 조건을 만족시키도록 세 점 A_1, A_2, A_3을 택한 후, 점 A_i $(i=4, 5, 6, 7, 8)$를 택하는 경우의 수를 생각한다.

풀이 원 O 위에 놓인 8개의 점을 임의로 하나씩 택하여 차례대로 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_8로 정하는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

조건 (가), (나)를 만족시키도록 세 점 A_1, A_2, A_3을 택하는 경우의 수는 다음 그림과 같이 4이다.



앞의 각 경우에 대하여 나머지 다섯 개의 점 A_4, A_5, A_6, A_7, A_8을 택하는 경우의 수는
$_5P_5=5!$
즉, 점 $A_i\,(i=1, 2, 3, \cdots, 8)$를 택하는 경우의 수는
$4\times5!$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{4\times5!}{7!}=\dfrac{2}{21}$

203 수학적 확률

전략 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합 중에서 서로 같은 집합을 포함하여 2개의 집합을 택하는 경우의 수를 구한 후, 택한 2개의 부분집합 중 하나가 다른 하나의 부분집합인 경우의 수를 구한다.

풀이 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합의 개수는
$2^4=16$
16개의 부분집합 중에서 서로 같은 집합을 포함하여 2개의 집합을 택하는 경우의 수는 16개 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_{16}H_2={}_{17}C_2=136$
택한 두 부분집합 중에서 하나가 다른 하나의 부분집합이 되는 경우의 수는 그중 한 부분집합의 원소의 개수에 따라 다음과 같다.
(i) 원소의 개수가 4인 경우
집합의 부분집합 중 원소의 개수가 4인 집합의 개수는
$_4C_4=1$
이때 부분집합은 $2^4=16$(개)이므로 이 경우의 수는
$1\times16=16$
(ii) 원소의 개수가 3인 경우
집합의 부분집합 중 원소의 개수가 3인 집합의 개수는
$_4C_3={}_4C_1=4$
이때 부분집합은 $2^3=8$(개)씩이므로 이 경우의 수는
$4\times8=32$
(iii) 원소의 개수가 2인 경우
집합의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 집합의 개수는
$_4C_2=6$
이때 부분집합은 $2^2=4$(개)씩이므로 이 경우의 수는
$6\times4=24$
(iv) 원소의 개수가 1인 경우
집합의 부분집합 중 원소의 개수가 1인 집합의 개수는
$_4C_1=4$
이때 부분집합은 2개씩이므로 이 경우의 수는
$4\times2=8$
(v) 원소의 개수가 0인 경우
이 경우의 수는 1
이상에서 하나가 다른 하나의 부분집합이 되는 모든 경우의 수는
$16+32+24+8+1=81$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{81}{136}$

204 확률의 덧셈정리

전략 지혜와 슬비가 같은 열에 이웃하여 앉는 경우를 생각해 본다.

풀이 지혜와 슬비가 1열에 이웃하게 앉는 사건을 A, 2열에 이웃하게 앉는 사건을 B라 하면
$P(A)=\dfrac{2\times2!\times{}_5P_4}{_7P_6}=\dfrac{2}{21}$
$P(B)=\dfrac{3\times2!\times{}_5P_4}{_7P_6}=\dfrac{1}{7}$
두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
$=\dfrac{2}{21}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{5}{21}$

205 여사건의 확률

전략 적어도 1개의 당첨 제비를 뽑는 사건은 3개 모두 당첨 제비를 뽑지 않는 사건의 여사건임을 이용한다.

풀이 당첨 제비의 개수를 n이라 하고 적어도 1개의 당첨 제비를 뽑는 사건을 A라 하면 A^C는 3개 모두 당첨 제비를 뽑지 않는 사건이므로
$P(A^C)=\dfrac{_{9-n}C_3}{_9C_3}=\dfrac{(9-n)(8-n)(7-n)}{9\times8\times7}$ …… ㉠
이때 $P(A)=\dfrac{20}{21}$이므로
$P(A^C)=1-P(A)=1-\dfrac{20}{21}=\dfrac{1}{21}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$\dfrac{(9-n)(8-n)(7-n)}{9\times8\times7}=\dfrac{1}{21}$
$(9-n)(8-n)(7-n)=24=4\times3\times2$
$9-n=4 \qquad \therefore n=5$
따라서 당첨 제비의 개수는 5이다.

206 조건부확률

전략 주어진 표를 이용하여 구하는 확률을 조건부확률로 나타낸다.

풀이 혈액형이 O형인 학생을 택하는 사건을 A, 음악 동아리에 가입한 여학생을 택하는 사건을 B라 하면
$P(A)=\dfrac{7+6+8+9}{150}=\dfrac{30}{150}=\dfrac{1}{5}$
$P(A\cap B)=\dfrac{9}{150}=\dfrac{3}{50}$
따라서 구하는 확률은
$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{3}{50}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{3}{10}$

다른풀이 구하는 확률은 혈액형이 O형인 전체 학생 중에서 음악 동아리에 가입한 여학생을 택할 확률과 같으므로
$\dfrac{9}{7+6+8+9}=\dfrac{3}{10}$

207 확률의 곱셈정리

전략 세 번째 검사에서 검사가 끝나려면 두 번째 검사까지 불량품이 1개만 나와야 함을 이용한다.

풀이 첫 번째 검사에서 불량품을 꺼내는 사건을 A, 두 번째 검사에서 불량품을 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{9}$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$$

$\therefore p_1=\frac{1}{45}$

또, 두 번째 검사까지 1개의 불량품을 꺼내는 사건을 C, 세 번째 검사에서 불량품을 꺼내는 사건을 D라 하면

$$\mathrm{P}(C)=\underbrace{\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}}_{\text{첫 번째에 불량품이 나올 확률}}+\overbrace{\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}}^{\text{두 번째에 불량품이 나올 확률}}=\frac{16}{45},$$

$\mathrm{P}(D|C)=\frac{1}{8}$

이므로

$$\mathrm{P}(C\cap D)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D|C)=\frac{16}{45}\times\frac{1}{8}=\frac{2}{45}$$

$\therefore p_2=\frac{2}{45}$

$\therefore p_1+p_2=\frac{1}{45}+\frac{2}{45}=\frac{1}{15}$

1등급 비법

제품을 1개씩 꺼낼 때 두 번째 불량품이 나오는 순간 검사가 끝나므로 n번째 검사에서 검사를 끝내기 위해서는 $(n-1)$번째 검사까지는 불량품이 1개만 나오고 n번째 검사에서 두 번째 불량품이 나오면 된다.

208 사건의 독립과 종속

전략 꺼낸 두 개의 공에 적힌 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이면 두 수의 합이 짝수가 된다.

풀이 (i) 두 개의 공에 적힌 수가 모두 짝수일 확률은

$\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{9}$

두 개의 공에 적힌 수가 모두 홀수일 확률은

$\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{9}$

즉, 두 개의 공에 적힌 수의 합이 짝수일 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

(ii) 두 개의 공이 모두 흰 색일 확률은

$\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{9}$

두 개의 공이 모두 검은 색일 확률은

$\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{2}{9}$

즉, 두 개의 공이 같은 색일 확률은

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

(iii) 두 개의 공에 적힌 수가 모두 짝수이면서 모두 흰 색일 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{45}$

두 개의 공에 적힌 수가 모두 짝수이면서 모두 검은 색일 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

두 개의 공에 적힌 수가 모두 홀수이면서 모두 흰 색일 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

두 개의 공에 적힌 수가 모두 홀수이면서 모두 검은 색일 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{45}$

즉, 두 개의 공에 적힌 수의 합이 짝수이면서 두 개의 공이 같은 색일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{45}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{45}=\frac{8}{45}$$

이때 (i), (ii)에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$

이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

209 독립시행의 확률

전략 지연이가 상금을 모두 가지려면 앞으로 선아는 최대 1번만 이기고 지연이는 3번을 이겨야 한다.

풀이 선아와 지연이가 게임에서 이길 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 10번째 게임에서 지연이가 상금을 모두 갖는 경우

지연이가 8번째, 9번째, 10번째 게임에서 모두 이겨야 하므로 그 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$

(ii) 11번째 게임에서 지연이가 상금을 모두 갖는 경우

지연이가 8번째, 9번째, 10번째 게임에서 2번 이기고, 11번째 게임에서 이겨야 하므로 그 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$

오답 피하기 12번째 게임에서 지연이가 상금을 모두 갖는 경우는 지연이가 8번째, 9번째, 10번째, 11번째 게임에서 2번 이기고, 12번째 게임에서 이겨야 한다.

그런데 이 경우는 선아가 먼저 게임에서 6번 이기는 상황이 되므로 생각하지 않는다.

III 통계

05 확률분포

교과서에서 뽑은 기본 문제 pp. 58~60

210 이산확률변수: ㄴ, 연속확률변수: ㄱ, ㄷ, ㄹ

211 (1) 0, 1, 2 (2) 풀이 참조 (3) $\frac{3}{4}$ **212** (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

213 (1) 1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

214 (1) 평균: 17, 분산: 18 (2) 평균: -9, 분산: 8

215 (1) 40 (2) $\frac{80}{3}$ (3) $\frac{4\sqrt{15}}{3}$ **216** C, B

217 (1) 0.383 (2) 0.8413 (3) 0.0668

218 (1) $Z=\frac{X-10}{2}$ (2) 0.6826

219 (1) $\mathrm{N}(30, 5^2)$ (2) $Z=\frac{X-30}{5}$ (3) 0.0228

210 이산확률변수는 확률변수가 가질 수 있는 값이 유한개이거나 자연수와 같이 셀 수 있어야 하고, 연속확률변수는 어떤 범위 안에 속하는 모든 실수의 값을 가질 수 있어야 한다.
이상에서 이산확률변수인 것은 ㄴ, 연속확률변수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

211 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 모든 값은 0, 1, 2

(2) 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.
$X=0$인 경우는 TT의 1가지
$X=1$인 경우는 HT, TH의 2가지
$X=2$인 경우는 HH의 1가지
이므로 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}$

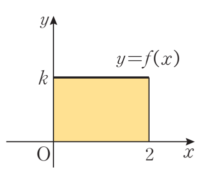
즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(3) $\mathrm{P}(X\le1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

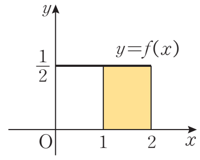
다른풀이 (3) $\mathrm{P}(X\le1)=1-\mathrm{P}(X=2)$
$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

212 (1) 함수 $f(x)=k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$2\times k=1$ $\quad\therefore k=\frac{1}{2}$

(2) $f(x)=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(X\ge1)$은 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같다.



$\therefore \mathrm{P}(X\ge1)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

1등급 비법
연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$ $(\alpha\le x\le\beta)$에 미정계수가 있는 경우에는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1임을 이용하여 미정계수를 구한다.

213 (1) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

(2) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}-1^2$
$=\frac{1}{2}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

214 (1) $\mathrm{E}(3X-1)=3\mathrm{E}(X)-1=3\times6-1=17$
$\mathrm{V}(3X-1)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times2=18$

(2) $\mathrm{E}(-2X+3)=-2\mathrm{E}(X)+3=-2\times6+3=-9$
$\mathrm{V}(-2X+3)=(-2)^2\mathrm{V}(X)=4\times2=8$

215 (1) $\mathrm{E}(X)=120\times\frac{1}{3}=40$

(2) $\mathrm{V}(X)=120\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{80}{3}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{80}{3}}=\frac{4\sqrt{15}}{3}$

216 평균이 m인 확률변수의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양이므로 평균이 가장 큰 확률변수의 정규분포곡선은 C이다.
또, 표준편차가 클수록 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이가 낮아지고 옆으로 퍼진 모양이 되므로 표준편차가 가장 큰 확률변수의 정규분포곡선은 B이다.

217 (1) $\mathrm{P}(-0.5\le Z\le0.5)$
$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$
$=2\times0.1915=0.383$

(2) $\mathrm{P}(Z\le1)=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=0.5+0.3413=0.8413$

(3) $\mathrm{P}(Z\ge1.5)=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$
$=0.5-0.4332=0.0668$

218 (1) $Z=\dfrac{X-10}{2}$

(2) $\mathrm{P}(8\le X\le 12)=\mathrm{P}\left(\dfrac{8-10}{2}\le Z\le\dfrac{12-10}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=2\times 0.3413=0.6826$

219 (1) $\mathrm{E}(X)=180\times\dfrac{1}{6}=30$

$\mathrm{V}(X)=180\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=25$

따라서 확률변수 X의 평균이 30, 표준편차가 5이므로 $\mathrm{N}(30,\ 5^2)$

(2) $Z=\dfrac{X-30}{5}$

(3) $\mathrm{P}(X\ge 40)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{40-30}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

유형 분석 기출 문제

pp. 61~70

220 ③	**221** $\dfrac{8}{15}$	**222** ②	**223** ①	**224** 4
225 ②	**226** ④	**227** ⑤	**228** $\dfrac{5}{32}$	**229** 2
230 ⑤	**231** ③	**232** -3	**233** 3	**234** ④
235 ⑤	**236** $\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$	**237** ⑤	**238** ②	**239** 6500원
240 ④	**241** ⑤	**242** ⑤	**243** 25	**244** ①
245 ③	**246** 15	**247** 210	**248** ②	**249** 17
250 ②	**251** 0.8185	**252** ③	**253** ②	**254** ②
255 수학	**256** 550	**257** ①	**258** 360점	**259** ③
260 ②	**261** ⑤	**262** 0.9332	**263** $\dfrac{15}{4}$	**264** ⑤
265 0.9938	**266** ④			

220 확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{a}{2}+\left(\dfrac{3}{4}-a\right)+2a^2=1$

$8a^2-2a-1=0,\ (4a+1)(2a-1)=0$

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{4}$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$

이때 $0\le\mathrm{P}(X=x)\le 1$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$

221 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$
$+\mathrm{P}(X=4)=1$

$k+\left(k+\dfrac{1}{9}\right)+\left(k-\dfrac{2}{9}\right)+\left(k-\dfrac{3}{9}\right)+\left(k-\dfrac{4}{9}\right)=1$

$5k-\dfrac{8}{9}=1,\ 5k=\dfrac{17}{9}$

$\therefore\ k=\dfrac{17}{45}$ ······ ㉮

따라서 $\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases}\dfrac{17}{45}+\dfrac{x}{9} & (x=0,\ 1)\\[2mm] \dfrac{17}{45}-\dfrac{x}{9} & (x=2,\ 3,\ 4)\end{cases}$ 이므로

$\mathrm{P}(X=1$ 또는 $X=3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\left(\dfrac{17}{45}+\dfrac{1}{9}\right)+\left(\dfrac{17}{45}-\dfrac{3}{9}\right)$

$=\dfrac{8}{15}$ ······ ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ k의 값 구하기	50%
㉯ $\mathrm{P}(X=1$ 또는 $X=3)$ 구하기	50%

1등급 비법

확률변수 X의 확률질량함수

$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$

에 대하여 p_i의 일부를 모르거나 함수식에 미정계수가 있을 때는

$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$

임을 이용한다.

222 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=9)=1$

$\dfrac{k}{2\times1}+\dfrac{k}{3\times2}+\dfrac{k}{4\times3}+\cdots+\dfrac{k}{9\times8}=1$

$k\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{9}\right)\right\}=1$

$k\left(1-\dfrac{1}{9}\right)=1,\ \dfrac{8}{9}k=1$

$\therefore\ k=\dfrac{9}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{9}{8x(x-1)}\ (x=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9)$이므로

$\mathrm{P}(4\le X\le 6)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)$

$=\dfrac{9}{8}\times\left(\dfrac{1}{4\times3}+\dfrac{1}{5\times4}+\dfrac{1}{6\times5}\right)$

$=\dfrac{9}{8}\times\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}\right)$

$=\dfrac{9}{8}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{16}$

개념 보충

부분분수로의 변형

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\ne B$)

223 $X^2-6X+8=0$에서

$(X-2)(X-4)=0$ $\quad\therefore\ X=2$ 또는 $X=4$

뽑힌 카드에 적힌 두 수를 $a,\ b\ (a<b)$라 하면 두 수의 차가

2인 경우의 (a, b)는 $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$의 3가지,
4인 경우의 (a, b)는 $(0, 4)$의 1가지
이므로

$P(X=2)=\frac{3}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$, $P(X=4)=\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

$$\begin{aligned}\therefore P(X^2-6X+8=0)&=P(X=2 \text{ 또는 } X=4)\\&=P(X=2)+P(X=4)\\&=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

224 포도 맛 사탕이 4개뿐이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$P(X=1)=\frac{{}_6C_1\times{}_4C_4}{{}_{10}C_5}=\frac{1}{42}$,

$P(X=2)=\frac{{}_6C_2\times{}_4C_3}{{}_{10}C_5}=\frac{5}{21}$,

$P(X=3)=\frac{{}_6C_3\times{}_4C_2}{{}_{10}C_5}=\frac{10}{21}$,

$P(X=4)=\frac{{}_6C_4\times{}_4C_1}{{}_{10}C_5}=\frac{5}{21}$,

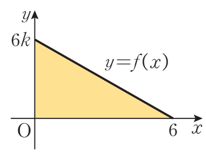
$P(X=5)=\frac{{}_6C_5\times{}_4C_0}{{}_{10}C_5}=\frac{1}{42}$

이때 $P(X=4)+P(X=5)=\frac{5}{21}+\frac{1}{42}=\frac{11}{42}$이므로

$P(X\geq 4)=\frac{11}{42}$

$\therefore a=4$

225 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times 6\times 6k=1$

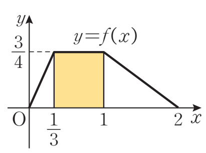
$18k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{18}$

226 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times\left(a-\frac{1}{3}+2\right)\times\frac{3}{4}=1$

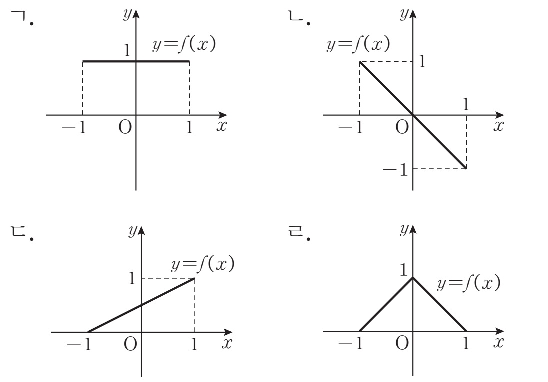
$a+\frac{5}{3}=\frac{8}{3} \qquad \therefore a=1$

이때 $P\left(\frac{1}{3}\leq X\leq 1\right)$은 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로



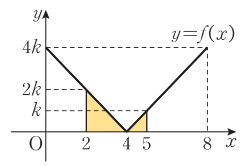
$$\begin{aligned}P\left(\frac{1}{3}\leq X\leq 1\right)&=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

227 보기의 함수 $y=f(x)$ $(-1\leq x\leq 1)$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



ㄱ. $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니므로 확률밀도함수가 아니다.
ㄴ. $0<x\leq 1$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수가 아니다.
이상에서 확률밀도함수인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

228 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=8$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times 4\times 4k+\frac{1}{2}\times 4\times 4k=1$

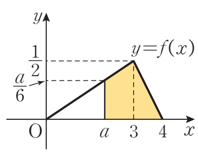
$16k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{16}$ …… ㉮

이때 $P(2\leq X\leq 5)$는 위의 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로

$P(2\leq X\leq 5)=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{16}=\frac{5}{32}$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ k의 값 구하기	60%
㉯ $P(2\leq X\leq 5)$ 구하기	40%

229 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $P(X\geq a)$는 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로



$P(X\geq a)=\frac{2}{3}$에서

$1-P(0\leq X\leq a)=\frac{2}{3}$

$1-\frac{1}{2}\times a\times\frac{a}{6}=\frac{2}{3}$

$a^2-4=0$, $(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because 0<a<3$)

230 조건 (가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이고, $P(-3\leq X\leq 3)=1$이므로

$P(0\leq X\leq 3)=\frac{1}{2}$

$\therefore P\left(0\leq X\leq\frac{1}{2}\right)+P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 3\right)=\frac{1}{2}$

이때 조건 (나)에서 $P\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)=5P\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)$이므로

$5P\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)+P\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)=\frac{1}{2}$

$6P\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)=\frac{1}{2}\qquad \therefore P\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)=\frac{1}{12}$

따라서 $P\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)=5P\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)=5\times\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$

이므로

$P\left(-\frac{1}{2}\le X\le 0\right)=P\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{12}$

231 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{5}+a+\frac{3}{10}=1\qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{3}{10}=\frac{21}{10}$,

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{3}{10}=\frac{49}{10}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{49}{10}-\left(\frac{21}{10}\right)^2=\frac{49}{100}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{49}{100}}=\frac{7}{10}$

232 $E(Y)=4$이므로 $E(aX+b)=4$, $aE(X)+b=4$

$\therefore 3a+b=4$ …… ㉠

$V(Y)=1$이므로 $V(aX+b)=1$, $a^2V(X)=1$

$16a^2=1\qquad \therefore a=\frac{1}{4}\ (\because a>0)$

$a=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{13}{4}$

$\therefore a-b=-3$

233 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{-k+1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{k+1}{5}$	$\frac{2k+1}{5}$	1

확률의 총합은 1이므로

$\frac{-k+1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{k+1}{5}+\frac{2k+1}{5}=1$

$2k=1\qquad \therefore k=\frac{1}{2}$ …… ㉮

확률변수 X에 대하여

$E(X)=(-1)\times\frac{1}{10}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{2}{5}=1$ …… ㉯

이므로

$E(4X-1)=4E(X)-1=4\times1-1=3$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ k의 값 구하기	40%
㉯ $E(X)$ 구하기	30%
㉰ $E(4X-1)$ 구하기	30%

234 $Y=\frac{1}{2}X+5$이므로

$E(Y)=E\left(\frac{1}{2}X+5\right)=\frac{1}{2}E(X)+5=4$

$\therefore E(X)=-2$

$E(Y)=4$, $E(Y^2)=20$이므로

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=20-4^2=4$

즉, $V(Y)=V\left(\frac{1}{2}X+5\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2V(X)=4$이므로

$V(X)=16$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{16}=4$이므로

$E(X)+\sigma(X)=2$

235 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{8}+a+\frac{1}{8}+b=1\qquad \therefore a+b=\frac{3}{4}$ …… ㉠

$E(X)=2$이므로

$0\times\frac{1}{8}+1\times a+2\times\frac{1}{8}+3\times b=2$

$\therefore a+3b=\frac{7}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$

이때 $E(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{2}=\frac{21}{4}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{21}{4}-2^2=\frac{5}{4}$

$\therefore V(2X)=2^2V(X)=4\times\frac{5}{4}=5$

236 흰 공이 3개, 흰 공이 아닌 공이 3개이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_3C_3}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$,

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{9}{20}$,

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_3C_1}{{}_6C_3}=\frac{9}{20}$,

$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\times{}_3C_0}{{}_6C_3}=\frac{1}{20}$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{20}+1^2\times\frac{9}{20}+2^2\times\frac{9}{20}+3^2\times\frac{1}{20}=\frac{27}{10}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{27}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{20}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{9}{20}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

1등급 비법

확률분포가 표로 주어지지 않은 경우에는 먼저 확률변수 X가 가질 수 있는 값에 대하여 그 각각의 확률을 구한 후, X의 확률분포를 표로 나타낸다. 이때

$\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

를 이용한다.

237 $a+b+c=6$에서 $c=6-a-b$ …… ㉠

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{a}{6}$	$\frac{b}{6}$	$\frac{6-a-b}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{4}{3}$이므로

$0\times\frac{a}{6}+1\times\frac{b}{6}+2\times\frac{6-a-b}{6}=\frac{4}{3}$

$\therefore\ 2a+b=4$ …… ㉡

$\mathrm{V}(X)=\frac{5}{9}$이므로

$0^2\times\frac{a}{6}+1^2\times\frac{b}{6}+2^2\times\frac{6-a-b}{6}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

$\therefore\ 4a+3b=10$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=2$

$a=1,\ b=2$를 ㉠에 대입하면 $c=3$

$\therefore\ a-b+c=2$

238 $\mathrm{P}(X=k)=p_k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$라 하면

$\mathrm{E}(X)$

$=1\times p_1+2\times p_2+3\times p_3+4\times p_4+5\times p_5=4$ …… ㉠

이때 $\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{2}p_k+\frac{1}{10}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$이므로

$\mathrm{E}(Y)$

$=1\times\left(\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{10}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{10}\right)+3\times\left(\frac{1}{2}p_3+\frac{1}{10}\right)$

$+4\times\left(\frac{1}{2}p_4+\frac{1}{10}\right)+5\times\left(\frac{1}{2}p_5+\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{1}{2}(1\times p_1+2\times p_2+3\times p_3+4\times p_4+5\times p_5)$

$+\frac{1}{10}(1+2+3+4+5)$

$=\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{10}\times 15\ (\because$ ㉠$)$

$=\frac{7}{2}$

239 받을 수 있는 상금을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은

2000, 4000, 10000 …… ㉮

이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=2000)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$

$\mathrm{P}(X=4000)=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\right)\times 3+\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)\times 3$

$=\frac{9}{16}$

$\mathrm{P}(X=10000)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{64}$

즉, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2000	4000	10000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{27}{64}$	1

…… ㉯

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=2000\times\frac{1}{64}+4000\times\frac{9}{16}+10000\times\frac{27}{64}=6500$

이므로 구하는 기댓값은 6500원이다. …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 상금 X가 가질 수 있는 값 구하기	20%
㉯ X의 값에 따라 각각의 확률을 구하여 표로 나타내기	50%
㉰ 상금의 기댓값 구하기	30%

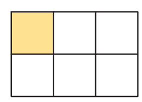
240 세로 방향의 직선 4개 중 2개, 가로 방향의 직선 3개 중 2개를 택할 때, 직사각형이 하나 만들어진다. 즉, 만들 수 있는 직사각형의 총 개수는

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=6\times 3=18$

직사각형의 넓이에 따라 경우를 나누어 생각하면 다음과 같다.

(i) 넓이가 1인 직사각형

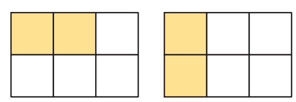
오른쪽 그림과 같은 직사각형이므로 그 개수는 6



(ii) 넓이가 2인 직사각형

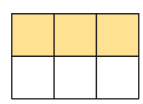
오른쪽 그림과 같은 직사각형이므로 그 개수는

$4+3=7$



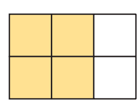
(iii) 넓이가 3인 직사각형

오른쪽 그림과 같은 직사각형이므로 그 개수는 2



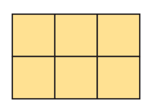
(iv) 넓이가 4인 직사각형

오른쪽 그림과 같은 직사각형이므로 그 개수는 2



(v) 넓이가 6인 직사각형

오른쪽 그림과 같은 직사각형이므로 그 개수는 1



이상에서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 6이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$,

$P(X=2)=\frac{7}{18}$, $P(X=3)=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$,

$P(X=4)=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$, $P(X=6)=\frac{1}{18}$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{7}{18}+3\times\frac{1}{9}+4\times\frac{1}{9}+6\times\frac{1}{18}=\frac{20}{9}$,

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{7}{18}+3^2\times\frac{1}{9}+4^2\times\frac{1}{9}+6^2\times\frac{1}{18}$

$=\frac{20}{3}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{20}{3}-\left(\frac{20}{9}\right)^2=\frac{140}{81}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{140}{81}}=\frac{2\sqrt{35}}{9}$이므로

$\sigma(3-9X)=9\sigma(X)=9\times\frac{2\sqrt{35}}{9}=2\sqrt{35}$

241 확률변수 X가 이항분포 $B\left(7, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_7C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{7-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 7)$

$\therefore P(X\le 6)=1-P(X=7)$

$=1-{}_7C_7\left(\frac{4}{5}\right)^7\left(\frac{1}{5}\right)^0$

$=1-\left(\frac{4}{5}\right)^7$

242 $P(X=x)={}_{49}C_x\frac{6^x}{7^{49}}$

$={}_{49}C_x\left(\frac{6}{7}\right)^x\left(\frac{1}{7}\right)^{49-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 49)$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(49, \frac{6}{7}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=49\times\frac{6}{7}=42$

243 $E(X)=10$, $\sigma(X)=\sqrt{6}$이므로

$np=10$ …… ㉠

$\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{6}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\sqrt{10(1-p)}=\sqrt{6}$, $1-p=\frac{3}{5}$ $\quad\therefore p=\frac{2}{5}$

$p=\frac{2}{5}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{5}n=10$ $\quad\therefore n=25$

244 확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=n\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$\{E(X)\}^2=E(X^2)-V(X)$

$=V(X)+25-V(X)=25$

즉, $\left(\frac{n}{2}\right)^2=25$이므로 $n^2=100$

$\therefore n=10$ ($\because$ n은 자연수)

245 확률변수 X가 이항분포 $B(10, p)$를 따르므로

$P(X=x)={}_{10}C_x p^x(1-p)^{10-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 10)$

이때 $P(X=1)=5P(X=0)$이므로

${}_{10}C_1 p^1(1-p)^9=5\times{}_{10}C_0 p^0(1-p)^{10}$

$10p(1-p)^9=5(1-p)^{10}$

$2p=1-p$ ($\because 0<p<1$) $\quad\therefore p=\frac{1}{3}$

$\therefore P(X=2)={}_{10}C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^8$

$=5\left(\frac{2}{3}\right)^8$

246 4개의 동전을 동시에 던지는 시행을 48회 반복하므로 48회의 독립시행이고, 4개의 동전을 한 번 던질 때 3개는 앞면, 1개는 뒷면이 나올 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(48, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=48\times\frac{1}{4}=12$, $V(X)=48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=9$

$\sigma(X)=3$

$\therefore E(X)+\sigma(X)=15$

247 눈의 수 m, n의 순서쌍 (m, n)에 대하여

$E=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2),$
$(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4),$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

이므로 $P(E)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$ …… ㉮

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(24, \frac{5}{12}\right)$를 따르므로

$V(X)=24\times\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{35}{6}$ …… ㉯

$\therefore V(6X-5)=6^2V(X)=36\times\frac{35}{6}=210$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 사건 E가 일어날 확률 구하기	40%
㉯ $V(X)$ 구하기	40%
㉰ $V(6X-5)$ 구하기	20%

248 정답을 맞힌 문항 수를 X문항이라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=20\times\frac{1}{5}=4$

시험 점수를 확률변수 Y라 하고 틀린 문항당 a점을 감점한다고 하면

$Y=5X-a(20-X)$

$\quad=(5+a)X-20a$

이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}((5+a)X-20a)=(5+a)\mathrm{E}(X)-20a$

$\qquad=(5+a)\times4-20a=-16a+20$

이때 $\mathrm{E}(Y)=0$이려면

$-16a+20=0 \qquad \therefore a=1.25$

따라서 틀린 문항당 1.25점을 감점해야 한다.

249 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고,

$\mathrm{P}(X\le13)=\mathrm{P}(X\ge21)$이므로

$m=\frac{13+21}{2}=17$

250 ㄱ. 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

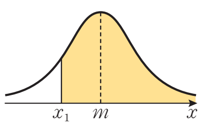
$\mathrm{P}(X\ge m)=\mathrm{P}(X\le m)=0.5$ (거짓)

ㄷ. $x_1<m$일 때,

$\mathrm{P}(X\ge x_1)$

$=\mathrm{P}(x_1\le X\le m)+\mathrm{P}(X\ge m)$

$=\mathrm{P}(x_1\le X\le m)+0.5$ (거짓)



이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

1등급 비법

평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용한다.

251 $m=20$, $\sigma=2$이므로

$\mathrm{P}(18\le X\le24)$

$=\mathrm{P}(20-2\le X\le20+2\times2)$

$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(m\le X\le m+\sigma)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$

252 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(20, 5^2)$, $\mathrm{N}(30, 7^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-20}{5}$, $Z_Y=\frac{Y-30}{7}$으로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(25\le X\le30)=\mathrm{P}(37\le Y\le k)$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{25-20}{5}\le Z_X\le\frac{30-20}{5}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{37-30}{7}\le Z_Y\le\frac{k-30}{7}\right)$

$\therefore \mathrm{P}(1\le Z_X\le2)=\mathrm{P}\left(1\le Z_Y\le\frac{k-30}{7}\right)$

따라서 $\frac{k-30}{7}=2$이므로

$k-30=14 \qquad \therefore k=44$

253 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(5, 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-5}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(2\le X\le k)=0.82$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{2-5}{3}\le Z\le\frac{k-5}{3}\right)=0.82$

$\mathrm{P}\left(-1\le Z\le\frac{k-5}{3}\right)=0.82$

$\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-5}{3}\right)=0.82$

$\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-5}{3}\right)=0.82$

$0.34+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-5}{3}\right)=0.82$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-5}{3}\right)=0.48$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.48$이므로

$\frac{k-5}{3}=2 \qquad \therefore k=11$

254 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(25, 4^2)$을 따르므로 $\mathrm{E}(X)=25$, $\sigma(X)=4$에서

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(4X-3)=4\mathrm{E}(X)-3=4\times25-3=97$

$\sigma(Y)=\sigma(4X-3)=4\sigma(X)=4\times4=16$

즉, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(97, 16^2)$을 따르므로

$Z=\frac{Y-97}{16}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(Y\le105)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{105-97}{16}\right)$

$\qquad=\mathrm{P}(Z\le0.5)$

$\qquad=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$

$\qquad=0.5+0.1915=0.6915$

다른풀이 $Y=4X-3$이므로

$\mathrm{P}(Y\le105)=\mathrm{P}(4X-3\le105)=\mathrm{P}(X\le27)$

$Z=\frac{X-25}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y\le105)=\mathrm{P}(X\le27)$

$\qquad=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{27-25}{4}\right)$

$\qquad=\mathrm{P}(Z\le0.5)$

$\qquad=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$

$\qquad=0.5+0.1915=0.6915$

255 지현이네 반 전체 학생의 국어, 영어, 수학 시험 성적을 각각 확률변수 X_A점, X_B점, X_C점이라 하면 X_A, X_B, X_C는 각각

정규분포 $N(65, 10^2)$, $N(72, 9^2)$, $N(68, 17^2)$을 따르므로

$Z_A=\frac{X_A-65}{10}$, $Z_B=\frac{X_B-72}{9}$, $Z_C=\frac{X_C-68}{17}$로 놓으면 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

다른 학생들이 지현이보다 국어, 영어, 수학 시험 성적이 높을 확률은 각각

$P(X_A>74)=P\left(Z_A>\frac{74-65}{10}\right)=P\left(Z_A>\frac{9}{10}\right)$

$P(X_B>80)=P\left(Z_B>\frac{80-72}{9}\right)=P\left(Z_B>\frac{8}{9}\right)$

$P(X_C>85)=P\left(Z_C>\frac{85-68}{17}\right)=P(Z_C>1)$

이때 $P\left(Z_B>\frac{8}{9}\right)>P\left(Z_A>\frac{9}{10}\right)>P(Z_C>1)$이므로

$P(X_B>80)>P(X_A>74)>P(X_C>85)$

따라서 확률이 낮은 과목일수록 상대적으로 지현이의 성적이 좋은 것이므로 지현이의 성적이 상대적으로 가장 좋은 과목은 수학이다.

1등급 비법

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(m_X, \sigma_X{}^2)$, $N(m_Y, \sigma_Y{}^2)$을 따를 때, X, Y를 $Z_X=\frac{X-m_X}{\sigma_X}$, $Z_Y=\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}$로 각각 표준화하여 확률을 비교한다.

⇨ $0<a<b$이면 $P(Z\geq a)>P(Z\geq b)$

256 학생들의 키를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(170, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-170}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. …… ㉮

$\therefore P(167.4\leq X\leq 175.2)$

$=P\left(\frac{167.4-170}{5}\leq Z\leq\frac{175.2-170}{5}\right)$

$=P(-0.52\leq Z\leq 1.04)$

$=P(-0.52\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1.04)$

$=P(0\leq Z\leq 0.52)+P(0\leq Z\leq 1.04)$

$=0.20+0.35=0.55$ …… ㉯

따라서 구하는 학생 수는

$1000\times 0.55=550$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 확률변수 X를 표준화하기	40%
㉯ $P(167.4\leq X\leq 175.2)$ 구하기	40%
㉰ 키가 167.4 cm 이상 175.2 cm 이하인 학생 수 구하기	20%

257 국주가 등교하는 데 걸리는 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(25, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-25}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

집에서 7시 35분에 출발한 국주가 학교에 7시 50분 이내에 도착하려면 $X\leq 15$이어야 하므로 국주가 지각하지 않을 확률은

$P(X\leq 15)=P\left(Z\leq\frac{15-25}{4}\right)$

$=P(Z\leq -2.5)$

$=P(Z\geq 2.5)$

$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$

258 응시자들의 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(350, 40^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-350}{40}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a점이라 하면

$P(X\geq a)=\frac{800}{2000}=0.4$에서

$P\left(Z\geq\frac{a-350}{40}\right)=0.4$

$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-350}{40}\right)=0.4$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{a-350}{40}\right)=0.1$

이때 $P(0\leq Z\leq 0.25)=0.1$이므로

$\frac{a-350}{40}=0.25$, $a-350=10$

$\therefore a=360$

따라서 합격자의 최저 점수는 360점이다.

259 확률변수 X는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(m\leq X\leq m+12)-P(X\leq m-12)=0.3664$에서

$P\left(\frac{m-m}{\sigma}\leq Z\leq\frac{m+12-m}{\sigma}\right)-P\left(Z\leq\frac{m-12-m}{\sigma}\right)$

$=0.3664$

$P\left(0\leq Z\leq\frac{12}{\sigma}\right)-P\left(Z\leq-\frac{12}{\sigma}\right)=0.3664$

$P\left(0\leq Z\leq\frac{12}{\sigma}\right)-P\left(Z\geq\frac{12}{\sigma}\right)=0.3664$ …… ㉠

또, $P\left(0\leq Z\leq\frac{12}{\sigma}\right)+P\left(Z\geq\frac{12}{\sigma}\right)=0.5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$P\left(0\leq Z\leq\frac{12}{\sigma}\right)=0.4332$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{12}{\sigma}=1.5$ $\quad\therefore \sigma=8$

260 확률변수 X가 이항분포 $B\left(64, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=64\times\frac{1}{2}=32$, $V(X)=64\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=16$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $N(32, 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-32}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(28 \le X \le 36) = \mathrm{P}\left(\frac{28-32}{4} \le Z \le \frac{36-32}{4}\right)$
$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 1)$
$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$= 2\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$= 2 \times 0.34 = 0.68$

261 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48, \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X) = 48 \times \frac{3}{4} = 36$, $\mathrm{V}(X) = 48 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 9$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(36, 3^2)$을 따르므로

$Z = \frac{X-36}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X \ge 45) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{45-36}{3}\right)$
$= \mathrm{P}(Z \ge 3)$
$= \mathrm{P}(Z \ge 0) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 3)$
$= 0.5 - 0.4987 = 0.0013$

262 생산한 제품 400개 중 불량품이 X개라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400, 0.1)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X) = 400 \times 0.1 = 40$, $\mathrm{V}(X) = 400 \times 0.1 \times 0.9 = 36$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(40, 6^2)$을 따르므로

$Z = \frac{X-40}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X \le 49) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{49-40}{6}\right)$
$= \mathrm{P}(Z \le 1.5)$
$= \mathrm{P}(Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$
$= 0.5 + 0.4332 = 0.9332$

263 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$, $\mathrm{V}(X) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50, 5^2)$을 따르므로

$Z = \frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. …… ㉮

$\mathrm{P}(X \ge 55-4k) = 0.9772$에서

$\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{55-4k-50}{5}\right) = 0.9772$

$\mathrm{P}\left(Z \ge 1-\frac{4}{5}k\right) = 0.9772$

$\mathrm{P}\left(1-\frac{4}{5}k \le Z \le 0\right) + \mathrm{P}(Z \ge 0) = 0.9772$

$\mathrm{P}\left(1-\frac{4}{5}k \le Z \le 0\right) + 0.5 = 0.9772$

$\therefore \mathrm{P}\left(1-\frac{4}{5}k \le Z \le 0\right) = 0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = \mathrm{P}(-2 \le Z \le 0) = 0.4772$이므로

$1-\frac{4}{5}k = -2$, $\frac{4}{5}k = 3$

$\therefore k = \frac{15}{4}$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 확률변수 X를 표준화하기	40%
㉯ k의 값 구하기	60%

1등급 비법

$\mathrm{P}(Z \ge a) = 0.9772$에서 $0.9772 > 0.5$이므로
$\mathrm{P}(Z \ge a) = 0.5 + \mathrm{P}(a \le Z \le 0)$임을 이용한다.

264 ${}_{450}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{450-x}$은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{1}{3}$인 어떤 사건이 450번의 독립시행에서 x번 일어날 확률이다.

따라서 이 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X) = 450 \times \frac{1}{3} = 150$, $\mathrm{V}(X) = 450 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 100$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150, 10^2)$을 따르므로

$Z = \frac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore$ (주어진 식)
$= \mathrm{P}(X=140) + \mathrm{P}(X=141) + \mathrm{P}(X=142) + \cdots + \mathrm{P}(X=175)$
$= \mathrm{P}(140 \le X \le 175)$
$= \mathrm{P}\left(\frac{140-150}{10} \le Z \le \frac{175-150}{10}\right)$
$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 2.5)$
$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)$
$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)$
$= 0.3413 + 0.4938 = 0.8351$

265 예약을 하고 강연장에 나오지 않는 사람이 X명이라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(900, 0.2)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X) = 900 \times 0.2 = 180$, $\mathrm{V}(X) = 900 \times 0.2 \times 0.8 = 144$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(180, 12^2)$을 따르므로

$Z = \frac{X-180}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 예약을 하고 강연장에 나온 모든 사람이 좌석에 앉아 강연을 들을 수 있으려면 예약을 취소하는 사람이 $900-750=150$(명) 이상이어야 하므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X \ge 150) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{150-180}{12}\right)$
$= \mathrm{P}(Z \ge -2.5)$
$= \mathrm{P}(Z \le 2.5)$
$= \mathrm{P}(Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)$
$= 0.5 + 0.4938 = 0.9938$

266 5점을 얻은 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(1800, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=1800\times\frac{1}{3}=600$,

$V(X)=1800\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=400$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $N(600, 20^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-600}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

한편 1800번의 시행 중에서 1점을 잃은 횟수는 $1800-X$이므로 1860점 이상을 얻기 위해서는

$5X-(1800-X)\ge1860$

$6X\ge3660 \quad \therefore X\ge610$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge610)&=P\left(Z\ge\frac{610-600}{20}\right)\\&=P(Z\ge0.5)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le0.5)\\&=0.5-0.1915=0.3085\end{aligned}$$

실력 완성 1등급 문제

pp. 71~73

267 ⑤	**268** 10	**269** ③	**270** ①	**271** ③
272 ③	**273** ②	**274** ⑤	**275** ⑤	**276** ⑤
277 219	**278** ③			

267 이산확률변수와 확률

전략 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 찾고 각 경우의 확률을 구하여 확률분포를 표로 만든다.

풀이 주사위는 최대 2개 던지므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(i) $X=0$일 때,

동전은 뒷면이 나오고 주사위 1개를 던져 나온 눈의 수가 짝수가 아닐 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

동전은 앞면이 나오고 주사위 2개를 던져 나온 눈의 수가 모두 짝수가 아닐 확률은

$\frac{1}{2}\times{}_2C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$

$\therefore P(X=0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

(ii) $X=1$일 때,

동전은 뒷면이 나오고 주사위 1개를 던져 나온 눈의 수가 짝수일 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

동전은 앞면이 나오고 주사위 2개를 던져 나온 눈의 수 중 짝수가 1개일 확률은

$\frac{1}{2}\times{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$

$\therefore P(X=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

(iii) $X=2$일 때,

동전은 뒷면이 나올 때, 주사위의 눈의 수가 짝수 2개가 나오는 경우는 없다.

동전은 앞면이 나오고 주사위 2개를 던져 나온 눈의 수가 짝수 2개일 확률은

$\frac{1}{2}\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$

$\therefore P(X=2)=\frac{1}{8}$

이상에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1

한편, $X^2-X=0$에서 $X(X-1)=0$

$\therefore X=0$ 또는 $X=1$

$P(X^2-X=0)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$

다른풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고

$P(X=2)=\frac{1}{8}$이므로

$$\begin{aligned}P(X^2-X=0)&=P(X=0)+P(X=1)\\&=1-P(X=2)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}\end{aligned}$$

268 연속확률변수와 확률밀도함수

전략 $0\le X\le3$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수에 대하여 $P(0\le X\le3)=1$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $0\le X\le3$의 모든 실수의 값을 가지는 연속확률변수 X의 확률밀도함수에 대하여 $P(0\le X\le3)=1$이므로

$P(x\le X\le3)=a(3-x)$에 $x=0$을 대입하면

$P(0\le X\le3)=3a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$

즉, $P(x\le X\le3)=\frac{1}{3}(3-x)$ $(0\le x\le3)$이므로

$$\begin{aligned}P(0\le X<a)&=P\left(0\le X<\frac{1}{3}\right)\\&=P(0\le X\le3)-P\left(\frac{1}{3}\le X\le3\right)\\&=1-\frac{1}{3}\left(3-\frac{1}{3}\right)\\&=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

따라서 $p=9$, $q=1$이므로

$p+q=10$

269 연속확률변수와 확률밀도함수

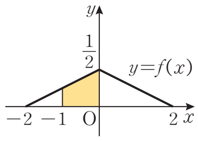
전략 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1임을 이용한다.

05 확률분포

풀이 ㄱ. 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $P(-1\le X\le 0)$은 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로



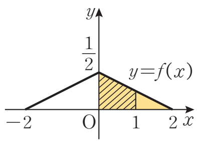
$P(-1\le X\le 0)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 1$

$=\frac{3}{8}$ (참)

ㄷ. $P(-1\le X\le 1\,|\,0\le X\le 2)=\frac{P(0\le X\le 1)}{P(0\le X\le 2)}$

이므로 오른쪽 그림에서 $P(0\le X\le 2)$는 색칠한 도형의 넓이와 같고, $P(0\le X\le 1)$은 빗금친 부분의 넓이와 같다.



$\therefore P(-1\le X\le 1\,|\,0\le X\le 2)$

$=\frac{P(0\le X\le 1)}{P(0\le X\le 2)}$

$=\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 1}{\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

개념 보충

조건부확률

사건 A가 일어났을 때 사건 B의 조건부확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ (단, $P(A)\ne 0$)

270 이산확률변수의 기댓값(평균), 분산, 표준편차

전략 먼저 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 찾고 각 경우의 확률을 구한다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{2!\times 2!}{4!}=\frac{1}{6}$,

$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1\times 2!\times 2!}{4!}=\frac{2}{3}$,

$P(X=2)=\frac{2!\times 2!}{4!}=\frac{1}{6}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=1$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{2}{3}+2^2\times\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{4}{3}-1^2=\frac{1}{3}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\sigma(6X-8)=6\sigma(X)=6\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

271 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

전략 $E(aX+b)=aE(X)+b$, $V(aX+b)=a^2V(X)$를 이용하여 $E(X^2)$을 구한다. (단, a, b는 상수이다.)

풀이 한 개의 주사위를 던져 4의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$

주사위를 5번 던졌을 때 4의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$E(Y)=5\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

$V(Y)=5\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

확률변수 X는 점 P의 좌표이므로

$X=2Y-(5-Y)=3Y-5$

$E(X)=E(3Y-5)=3E(Y)-5$

$=3\times\frac{5}{6}-5=-\frac{5}{2}$

$V(X)=V(3Y-5)=3^2V(Y)$

$=9\times\frac{25}{36}=\frac{25}{4}$

$\therefore E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$=\frac{25}{4}+\left(-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$

272 이항분포

전략 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따르면 $P(X=x)={}_nC_xp^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, n)$임을 이용한다.

풀이 소수가 적힌 공을 꺼낼 확률은

$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

주머니에서 한 개의 공을 꺼내는 시행을 20회 반복했을 때 소수가 적힌 공을 꺼내는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(20, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$P(X=x)={}_{20}C_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{20-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 20)$

따라서 구하는 상금의 기댓값은

$${}_{20}C_0\left(\frac{3}{5}\right)^{20}+16\times{}_{20}C_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^{19}+16^2\times{}_{20}C_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{18}+\cdots+16^{20}\times{}_{20}C_{20}\left(\frac{2}{5}\right)^{20}$$

$$={}_{20}C_0\left(\frac{3}{5}\right)^{20}+{}_{20}C_1\left(\frac{32}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^{19}+{}_{20}C_2\left(\frac{32}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{18}+\cdots+{}_{20}C_{20}\left(\frac{32}{5}\right)^{20}$$

$=\left(\frac{32}{5}+\frac{3}{5}\right)^{20}$ ← 자연수 n에 대하여 $(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_nb^n$

$=7^{20}$(원)

273 **정규분포 ⊕ 표준정규분포**

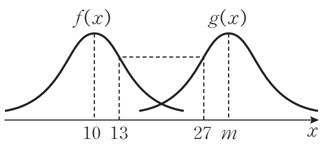
전략 두 확률변수의 표준편차가 같으면 그에 대한 두 확률밀도함수의 그래프도 평행이동에 의하여 포개어짐을 이용한다.

풀이 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같으므로 두 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 평행이동에 의하여 포개어진다.

또, $f(x)$의 그래프는 직선 $x=10$에 대하여 대칭이고, $g(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

한편, 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(m, 4^2)$을 따르고, $\mathrm{P}(Y\ge 27)\ge 0.5$이므로

$m\ge 27$



이때 $f(13)=g(27)$이므로 위의 그림에서

$m=27+3=30$

즉, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(30, 4^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{Y-30}{4}$이라 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(Y\le 24)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{24-30}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

274 **표준정규분포**

전략 회사 직원들의 출근 시간을 확률변수 X분이라 하고, $\mathrm{P}(X\ge 73)$을 구한다.

풀이 회사 직원들의 출근 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(66.4, 15^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-66.4}{15}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

회사 직원의 출근 시간이 73분 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 73)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{73-66.4}{15}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0.44)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.44)\\&=0.5-0.17\\&=0.33\end{aligned}$$

출근 시간에 따라 이 날 출근한 이 회사 직원들 중 임의로 선택한 한 명이 지하철을 이용하는 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) 출근 시간이 73분 이상이고 지하철을 이용하였을 확률은
$0.33\times 0.4=0.132$

(ii) 출근 시간이 73분 미만이고 지하철을 이용하였을 확률은
$(1-0.33)\times 0.2=0.134$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$0.132+0.134=0.266$

275 **이항분포와 정규분포의 관계**

전략 주어진 식을 이용하여 n, p의 값을 구한 후, 이항분포와 정규분포의 관계를 이용한다.

풀이 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르는 확률변수 X의 분산이 $\dfrac{100}{9}$이므로

$np(1-p)=\dfrac{100}{9}$ ······ ㉠

또, $\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, n)$이고,

$\mathrm{P}(X=n-1)=16\mathrm{P}(X=n)$이므로

${}_n\mathrm{C}_{n-1}p^{n-1}(1-p)=16\times{}_n\mathrm{C}_n p^n$

$\therefore n(1-p)=16p$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$16p^2=\dfrac{100}{9}$ $\quad\therefore p=\dfrac{5}{6}$ $(\because p>0)$

$p=\dfrac{5}{6}$를 ㉡에 대입하면

$n\times\dfrac{1}{6}=16\times\dfrac{5}{6}$ $\quad\therefore n=80$

$\mathrm{V}(X)=\dfrac{100}{9}$이고 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(80, \dfrac{5}{6}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=80\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{200}{3}$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\dfrac{200}{3}, \left(\dfrac{10}{3}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-\frac{200}{3}}{\frac{10}{3}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge 60)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{60-\frac{200}{3}}{\frac{10}{3}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+0.5\\&=0.4772+0.5=0.9772\end{aligned}$$

276 **이항분포와 정규분포의 관계**

전략 계란 1개의 무게를 확률변수 X g이라 하고, 계란이 특란일 확률을 구한다.

풀이 계란 1개의 무게를 확률변수 X g이라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50, 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

계란이 특란일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 60)&=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{60-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

임의로 택한 2500개의 계란 중 특란의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(2500, 0.02)$를 따르므로

$E(Y)=2500\times0.02=50$

$V(Y)=2500\times0.02\times0.98=49$

즉, Y는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 7^2)$을 따르므로

$Z_Y=\frac{Y-50}{7}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(Y\ge57)&=P\left(Z_Y\ge\frac{57-50}{7}\right)\\&=P(Z_Y\ge1)\\&=P(Z_Y\ge0)-P(0\le Z_Y\le1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

277 **이산확률변수의 기댓값(평균), 분산, 표준편차**

(1단계) 검은 구슬의 개수를 구한다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고,

$P(X=2)=\frac{1}{60}$에서 검은 구슬이 2개이려면 동전 2개를 던졌을 때 모두 앞면이 나오고 주머니에서 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 구슬이어야 한다.

10개의 구슬 중 검은 구슬의 개수를 x라 하면 흰 구슬의 개수는 $10-x$이므로

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{x}{10}\times\frac{x-1}{9}=\frac{1}{60}$$

$x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because x\ge0)$

따라서 주머니 속에는 흰 구슬 7개, 검은 구슬 3개가 들어 있다.

(2단계) $P(X=0)$, $P(X=1)$을 구하여 확률분포표를 만든다.

$X=1$인 경우는 다음과 같다.

(i) 동전 2개를 던져 앞면이 1개 나오고 주머니에서 꺼낸 1개의 구슬이 검은 구슬일 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$$

(ii) 동전 2개를 던져 모두 앞면이 나오고 주머니에서 꺼낸 2개의 구슬 중 1개만 검은 구슬일 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\right)=\frac{7}{60}$$

(i), (ii)에서

$$P(X=1)=\frac{3}{20}+\frac{7}{60}=\frac{4}{15}$$

이므로

$$\begin{aligned}P(X=0)&=1-\{P(X=1)+P(X=2)\}\\&=1-\left(\frac{4}{15}+\frac{1}{60}\right)=\frac{43}{60}\end{aligned}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{43}{60}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{60}$	1

(3단계) $E(X)$, $V(X)$를 각각 구한다.

확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{43}{60}+1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{1}{60}=\frac{3}{10}$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{43}{60}+1^2\times\frac{4}{15}+2^2\times\frac{1}{60}=\frac{1}{3}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{73}{300}$

(4단계) $V(30X)$를 구한다.

$\therefore V(30X)=30^2V(X)=900\times\frac{73}{300}=219$

278 **표준정규분포**

(1단계) 두 확률변수 X, Y를 각각 표준화하여 $F(t)$, $G(t)$를 나타낸다.

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$, $N(2m,\ 4\sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-m}{\sigma}$, $Z_Y=\frac{Y-2m}{2\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore F(t)&=P(X\ge m-\sigma t)\\&=P\left(Z_X\ge\frac{m-\sigma t-m}{\sigma}\right)\\&=P(Z_X\ge-t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G(t)&=P(Y\le2m+\sigma t)\\&=P\left(Z_Y\le\frac{2m+\sigma t-2m}{2\sigma}\right)\\&=P\left(Z_Y\le\frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

(2단계) ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $F(-1)=P(Z_X\ge1)$, $G(2)=P(Z_Y\le1)$이므로

$F(-1)+G(2)=1$ (참)

ㄴ. $2t_1<t_2$이면 $-t_1>-\frac{t_2}{2}$이므로

$P(Z\ge-t_1)<P\left(Z\ge-\frac{t_2}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\therefore F(t_1)&=P(Z_X\ge-t_1)\\&<P\left(Z_Y\ge-\frac{t_2}{2}\right)=P\left(Z_Y\le\frac{t_2}{2}\right)=G(t_2)\end{aligned}$$

$\therefore F(t_1)<G(t_2)$ (참)

ㄷ. $t>0$이므로

$$\begin{aligned}F(t)&=P(Z_X\ge-t)=P(Z_X\le t)\\&=P(Z_X\le0)+P(0\le Z_X\le t)\\&=0.5+P(0\le Z_X\le t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G(4t)&=P(Z_Y\le2t)\\&=P(Z_Y\le0)+P(0\le Z_Y\le2t)\\&=0.5+P(0\le Z_Y\le2t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore 2F(t)-\{G(4t)+0.5\}&=2\{0.5+P(0\le Z_X\le t)\}\\&\quad-\{0.5+P(0\le Z_Y\le2t)+0.5\}\\&=2P(0\le Z_X\le t)-P(0\le Z_Y\le2t)\\&=2P(0\le Z_X\le t)-\{P(0\le Z_Y\le t)+P(t\le Z_Y\le2t)\}\\&=P(0\le Z_X\le t)-P(t\le Z_Y\le2t)\end{aligned}$$

이때 $P(0\le Z\le t)>P(t\le Z\le2t)$이므로

$2F(t)-\{G(4t)+0.5\}>0$

$\therefore 2F(t)>G(4t)+0.5$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

06 통계적 추정

교과서에서 뽑은 기본 문제 p. 74

279 (1) 125 (2) 60 (3) 10

280 (1) 풀이 참조 (2) $\mathrm{E}(\overline{X})=4$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{3}$

281 (1) $12.02\le m\le 13.98$ (2) $11.71\le m\le 14.29$

279 (1) 5장의 카드에서 3장을 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_3=125$

(2) 5장의 카드에서 3장을 뽑는 순열의 수와 같으므로

$_5\mathrm{P}_3=60$

(3) 5장의 카드에서 3장을 뽑는 조합의 수와 같으므로

$_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

개념 보충

복원추출과 비복원추출

(1) 복원추출: 한 번 추출된 자료를 되돌려 놓은 후 다시 추출하는 방법

(2) 비복원추출: 추출된 자료를 되돌려 놓지 않고 다시 추출하는 방법

280 (1) 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포표를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $\mathrm{E}(\overline{X})=2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{2}{9}+6\times\frac{1}{9}=4$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=2^2\times\frac{1}{9}+3^2\times\frac{2}{9}+4^2\times\frac{1}{3}+5^2\times\frac{2}{9}+6^2\times\frac{1}{9}-4^2$

$=\frac{52}{3}-16=\frac{4}{3}$

다른풀이 (2) 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{3}=4$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{3}+6^2\times\frac{1}{3}-4^2$

$=\frac{56}{3}-16=\frac{8}{3}$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=4$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{8}{3}}{2}=\frac{4}{3}$

281 $\overline{x}=13$, $\sigma=4$, $n=64$이므로

(1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$13-1.96\times\frac{4}{\sqrt{64}}\le m\le 13+1.96\times\frac{4}{\sqrt{64}}$

$\therefore 12.02\le m\le 13.98$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$13-2.58\times\frac{4}{\sqrt{64}}\le m\le 13+2.58\times\frac{4}{\sqrt{64}}$

$\therefore 11.71\le m\le 14.29$

유형 분석 기출 문제 pp. 75~81

282 ②	**283** ④	**284** ③	**285** ④	**286** ①
287 5	**288** ④	**289** 0.1587	**290** ②	**291** ⑤
292 0.0456	**293** 74	**294** 25	**295** ①	
296 $4.412\le m\le 5.588$	**297** ③	**298** ②		**299** 84.98
300 25	**301** $94.2\le m\le 145.8$		**302** 94	**303** ③
304 36	**305** ⑤	**306** ④	**307** 385개	**308** ④
309 ④				

282 모평균이 20, 모분산이 16, 표본의 크기가 16이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=20$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{16}{16}=1$

따라서 $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=1+400=401$

283 모표준편차가 2, 표본의 크기가 n이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{2}{\sqrt{n}}$

이때 $\sigma(\overline{X})$가 $\frac{1}{5}$ 이하이므로

$\frac{2}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{5}$, $\sqrt{n}\ge 10$ $\quad\therefore n\ge 100$

따라서 n의 최솟값은 100이다.

284 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{2}{15}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{4}{15}+5\times\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{15}+2^2\times\frac{2}{15}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{4}{15}+5^2\times\frac{1}{3}-\left(\frac{11}{3}\right)^2$

$=15-\frac{121}{9}=\frac{14}{9}$

06 통계적 추정

이때 표본의 크기가 25이므로

$V(\overline{X})=\dfrac{\frac{14}{9}}{25}=\dfrac{14}{225}$

$\therefore\ \sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\sqrt{\dfrac{14}{225}}=\dfrac{\sqrt{14}}{15}$

$\therefore\ \sigma(30\overline{X})=30\sigma(\overline{X})=30\times\dfrac{\sqrt{14}}{15}=2\sqrt{14}$

개념 보충

이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차

이산확률변수 X와 두 상수 $a\ (a\neq0)$, b에 대하여

① $E(aX+b)=aE(X)+b$

② $V(aX+b)=a^2V(X)$

③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

285 확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{1}{6}+a+b=1 \qquad \therefore\ a+b=\dfrac{5}{6}$ …… ㉠

$E(X^2)=\dfrac{16}{3}$이므로

$0^2\times\dfrac{1}{6}+2^2\times a+4^2\times b=\dfrac{16}{3}$

$\therefore\ a+4b=\dfrac{4}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{2}{3},\ b=\dfrac{1}{6}$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{2}{3}+4\times\dfrac{1}{6}=2$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\dfrac{16}{3}-2^2=\dfrac{4}{3}$

이때 표본의 크기가 20이므로

$V(\overline{X})=\dfrac{\frac{4}{3}}{20}=\dfrac{1}{15}$

286 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\dfrac{3}{20}+1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{5}+4\times\dfrac{3}{20}=2$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$\quad=0^2\times\dfrac{3}{20}+1^2\times\dfrac{1}{5}+2^2\times\dfrac{3}{10}+3^2\times\dfrac{1}{5}+4^2\times\dfrac{3}{20}-2^2$

$\quad=\dfrac{28}{5}-4=\dfrac{8}{5}$

이때 표본의 크기가 10이므로

$E(\overline{X})=2$

$V(\overline{X})=\dfrac{\frac{8}{5}}{10}=\dfrac{4}{25}$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\sqrt{\dfrac{4}{25}}=\dfrac{2}{5}$

$\therefore\ E(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=2+\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{5}$

참고 표본을 뽑을 때, 특별한 언급이 없으면 임의추출은 복원추출로 생각한다.

287 화살을 한 번 쏘아서 맞힌 영역에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

…… ㉮

확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{3}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$\quad=1^2\times\dfrac{1}{2}+2^2\times\dfrac{1}{3}+3^2\times\dfrac{1}{6}-\left(\dfrac{5}{3}\right)^2$

$\quad=\dfrac{10}{3}-\dfrac{25}{9}=\dfrac{5}{9}$ …… ㉯

표본의 크기가 n일 때 $V(\overline{X})=\dfrac{1}{9}$이어야 하므로

$V(\overline{X})=\dfrac{\frac{5}{9}}{n}=\dfrac{1}{9},\ \dfrac{5}{9n}=\dfrac{1}{9}$

$\therefore\ n=5$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 화살을 한 번 쏘아서 맞힌 영역에 적힌 숫자를 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내기	30%
㉯ $E(X)$, $V(X)$ 구하기	30%
㉰ n의 값 구하기	40%

288 모평균이 10, 모분산이 25, 표본의 크기가 100이므로

① $E(\overline{X})=10$

② $V(\overline{X})=\dfrac{25}{100}=\dfrac{1}{4}$

③ $\sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$

④ $E(X)=E(\overline{X})$이지만 $V(X)\neq V(\overline{X})$이므로 $\overline{X}$의 분포는 모집단의 분포와 다르다.

⑤ $\overline{X}$를 확률변수 Z로 표준화하면

$Z=\dfrac{\overline{X}-10}{\frac{1}{2}}=2(\overline{X}-10)$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

289 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(32,\ \frac{12^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(32,\ 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-32}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le 29)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{29-32}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

1등급 비법

표준정규분포에서의 확률

표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z에 대한 확률은 다음을 이용하여 구한다. (단, $0<a<b$)

① $\mathrm{P}(Z\ge 0)=\mathrm{P}(Z\le 0)=0.5$
② $\mathrm{P}(-a\le Z\le 0)=\mathrm{P}(0\le Z\le a)$
③ $\mathrm{P}(-a\le Z\le a)=2\mathrm{P}(0\le Z\le a)$
④ $\mathrm{P}(Z\ge a)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le a)$
⑤ $\mathrm{P}(a\le Z\le b)=\mathrm{P}(0\le Z\le b)-\mathrm{P}(0\le Z\le a)$
⑥ $\mathrm{P}(-a\le Z\le b)=\mathrm{P}(0\le Z\le a)+\mathrm{P}(0\le Z\le b)$

290 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(144.9,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(144.9,\ \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(144.9,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-144.9}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(141.7\le\overline{X}\le 148.9)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{141.7-144.9}{2}\le Z\le\frac{148.9-144.9}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.6\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(-1.6\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.4452+0.4772=0.9224\end{aligned}$$

291 ㄱ. 주어진 그래프에서 평균이 18이므로 모평균 $m=18$이다. (참)

ㄴ. 평균이 18로 일정하고 $f(x)$의 그래프가 $g(x)$의 그래프보다 폭이 좁고 높이가 높으므로 $\overline{X}$의 표준편차가 $\overline{Y}$의 표준편차보다 작다.

$\therefore\ \sigma(\overline{X})<\sigma(\overline{Y})$ (참)

ㄷ. $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $\sigma(\overline{Y})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이므로 ㄴ에서

$\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}<\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

즉, $\sqrt{n_2}<\sqrt{n_1}$ ($\because\ \sigma>0$)이므로 $n_2<n_1$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

292 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 40^2)$을 따르고 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{40^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\ge 10)&=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{5}\right|\ge\frac{10}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(|Z|\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\le -2)+\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=2\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=2\{\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\}\\&=2\times(0.5-0.4772)=0.0456\end{aligned}$$

293 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(80,\ \frac{20^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(80,\ 4^2)$을 따른다. …… ㉮

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-80}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le k)=0.0668$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-80}{4}\right)=0.0668$

$\mathrm{P}\left(Z\ge -\frac{k-80}{4}\right)=0.0668$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le -\frac{k-80}{4}\right)=0.0668$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le -\frac{k-80}{4}\right)=0.4332$ …… ㉯

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$-\frac{k-80}{4}=1.5$, $k-80=-6$

$\therefore\ k=74$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포 구하기	20%
㉯ 주어진 확률을 표준정규분포를 이용할 수 있도록 변형하기	50%
㉰ k의 값 구하기	30%

294 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 1.2^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(8,\ \frac{1.2^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(8,\ \left(\frac{1.2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(7.76\le\overline{X}\le 8.24)\ge 0.6826$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{7.76-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{8.24-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\right)\ge 0.6826$

$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{5} \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{5}\right) \ge 0.6826$, $2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{5}\right) \ge 0.6826$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{5}\right) \ge 0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{5} \ge 1 \qquad \therefore n \ge 25$

따라서 n의 최솟값은 25이다.

295 공장에서 생산하는 양초 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(25, 3^2)$을 따른다.

이때 임의추출한 양초 4개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(25, \frac{3^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(25, \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z = \frac{\overline{X}-25}{\frac{3}{2}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 양초 4개를 포장한 한 상자의 무게가 109 g 이상 115 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(109 \le 4\overline{X} \le 115) &= \mathrm{P}\left(\frac{109}{4} \le \overline{X} \le \frac{115}{4}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\frac{\frac{109}{4}-25}{\frac{3}{2}} \le Z \le \frac{\frac{115}{4}-25}{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \mathrm{P}(1.5 \le Z \le 2.5) \\ &= \mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) \\ &= 0.4938 - 0.4332 = 0.0606\end{aligned}$$

296 표본평균이 5, 모표준편차가 3, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$5 - 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{100}} \le m \le 5 + 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{100}}$

$\therefore 4.412 \le m \le 5.588$

297 표본의 크기 225가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 30을 사용할 수 있다.

표본평균이 230이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$230 - 2.58 \times \frac{30}{\sqrt{225}} \le m \le 230 + 2.58 \times \frac{30}{\sqrt{225}}$

$\therefore 224.84 \le m \le 235.16$

따라서 신뢰도 99 %의 신뢰구간에 속하는 자연수는

225, 226, 227, $\cdots$, 235

의 11개이다.

298 표본의 크기가 n, 표본평균이 11, 모표준편차가 5이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$11 - 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \le m \le 11 + 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $8.85 \le m \le 13.15$와 일치하므로

$11 - 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = 8.85$, $11 + 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = 13.15$

따라서 $2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = 2.15$이므로

$\sqrt{n} = 6 \qquad \therefore n = 36$

299 표본평균이 20, 모표준편차가 4이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$20 - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} \le m \le 20 + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}}$ …… ㉮

이 신뢰구간이 $19.02 \le m \le a$와 일치하므로

$20 - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = 19.02$, $20 + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = a$

$\therefore n = 64$, $a = 20.98$ …… ㉯

$\therefore n + a = 84.98$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간 구하기	50%
㉯ n, a의 값 구하기	40%
㉰ $n+a$의 값 구하기	10%

300 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 49이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}} \le m \le \overline{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}}$

$\therefore \overline{x} - 0.28\sigma \le m \le \overline{x} + 0.28\sigma$

이 신뢰구간이 $1.73 \le m \le 1.87$과 일치하므로

$\overline{x} - 0.28\sigma = 1.73$, $\overline{x} + 0.28\sigma = 1.87$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\overline{x} = 1.8$, $\sigma = 0.25$

따라서 $k = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{0.25}{1.8} = \frac{5}{36}$이므로

$180k = 180 \times \frac{5}{36} = 25$

301 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$\overline{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100.4$ …… ㉠

$\overline{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 139.6$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\overline{x} = 240 \qquad \therefore \overline{x} = 120$

$\overline{x} = 120$을 ㉡에 대입하면

$1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 19.6 \qquad \therefore \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10$

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$120 - 2.58 \times 10 \le m \le 120 + 2.58 \times 10$

$\therefore 94.2 \le m \le 145.8$

302 표본평균이 160, 모표준편차가 12, 표본의 크기가 36이므로

$P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$160-k\times\frac{12}{\sqrt{36}}\le m\le 160+k\times\frac{12}{\sqrt{36}}$

$\therefore 160-2k\le m\le 160+2k$ …… ㉮

이 신뢰구간이 $156.24\le m\le 163.76$과 일치하므로

$160-2k=156.24$, $160+2k=163.76$

$\therefore k=1.88$ …… ㉯

이때 주어진 표준정규분포표에서

$P(|Z|\le 1.88)=2P(0\le Z\le 1.88)$

$=2\times 0.47=0.94$

이므로 $\frac{\alpha}{100}=0.94$

$\therefore \alpha=94$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $P(\lvert Z\rvert\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하고 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간을 k에 대한 식으로 나타내기	40%
㉯ k의 값 구하기	30%
㉰ α의 값 구하기	30%

303 모표준편차가 15, 표본의 크기가 100이므로 신뢰도 95 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$2\times 1.96\times\frac{15}{\sqrt{100}}=5.88$

304 $b-a$의 값은 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이이므로

$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(단,\ P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

$n=196$이면 $b-a=4$이므로

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{196}}=4$, $\frac{k\sigma}{7}=4$ $\quad\therefore k\sigma=28$

따라서 $b-a=\frac{28}{3}$이면

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{28}{3}$, $\frac{2\times 28}{\sqrt{n}}=\frac{28}{3}$

$\sqrt{n}=6$ $\quad\therefore n=36$

305 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이 l은

$l=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(단,\ P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

이므로

$\frac{l}{3}=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{3}$ $\quad\therefore \frac{l}{3}=2k\frac{\sigma}{\sqrt{9n}}$

따라서 신뢰구간의 길이가 $\frac{l}{3}$이 되려면 표본의 크기는 $9n$이 되어야 한다.

306 표본의 크기를 n이라 하면 모표준편차가 9이므로 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$2\times 2.58\times\frac{9}{\sqrt{n}}$

신뢰구간의 길이가 3 이하가 되려면

$2\times 2.58\times\frac{9}{\sqrt{n}}\le 3$

$\sqrt{n}\ge 15.48$ $\quad\therefore n\ge 239.6304$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 240이다.

307 표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\bar{x}|\le\frac{9.8}{\sqrt{n}}$ …… ㉮

이때 모평균과 표본평균의 차 $|m-\bar{x}|$가 0.5 이하이려면

$\frac{9.8}{\sqrt{n}}\le 0.5$, $\sqrt{n}\ge 19.6$

$\therefore n\ge 384.16$ …… ㉯

따라서 최소 385개의 표본을 조사해야 한다. …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $\lvert m-\bar{x}\rvert$의 값의 범위 구하기	50%
㉯ n의 값의 범위 구하기	40%
㉰ 최소 몇 개의 표본을 조사해야 하는지 구하기	10%

1등급 비법

모평균과 표본평균의 차

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 모평균 m을 추정할 때, 모평균 m과 표본평균 $\bar{X}$의 차는

$|m-\bar{X}|\le k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(단,\ P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

308 모표준편차가 10, 표본의 크기가 64이므로

$P(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$ (k는 상수)

라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$2k\times\frac{10}{\sqrt{64}}=4$ $\quad\therefore k=1.6$

따라서 $P(-1.6\le Z\le 1.6)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$\alpha=100P(-1.6\le Z\le 1.6)$

$=200P(0\le Z\le 1.6)$

$=200\times 0.45=90$

309 ㄱ. 표본평균의 값을 $\bar{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 포함한다. (참)

ㄴ. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\text{단, } \mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 작을수록 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다. (거짓)

ㄷ. ㉠에서 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지고 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

실력 완성 1등급 문제

pp. 82~83

310 $\frac{75}{2}$	**311** ③	**312** 4	**313** ①	**314** 0.02
315 ④	**316** ③	**317** ②		

310 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

전략 $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=5$이므로

$$2\times a+4\times\left(\frac{1}{3}-a\right)+6\times\frac{1}{2}+8\times\frac{1}{6}=5$$

$$\therefore a=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times0+6^2\times\frac{1}{2}+8^2\times\frac{1}{6}-5^2$$
$$=30-25=5$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{2}$$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$$
$$=\frac{5}{2}+5^2=\frac{55}{2}$$

$$\mathrm{V}(2\overline{X}+1)=2^2\mathrm{V}(\overline{X})=4\times\frac{5}{2}=10$$

$$\therefore \mathrm{E}(\overline{X}^2)+\mathrm{V}(2\overline{X}+1)=\frac{55}{2}+10=\frac{75}{2}$$

311 표본평균의 확률

전략 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(2a-x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

풀이 확률밀도함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(64-x)$를 만족시키므로 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=32$에 대하여 대칭이다.

$\therefore m=32$

모평균이 32, 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(32,\ \frac{12^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(32,\ 2^2)$을 따른다.

이때 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-32}{2}$로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(26\le\overline{X}\le30)=\mathrm{P}\left(\frac{26-32}{2}\le Z_{\overline{X}}\le\frac{30-32}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-3\le Z_{\overline{X}}\le-1)$$

한편, $Z_X=\frac{X-32}{12}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 주어진 확률밀도함수의 그래프에서

$\mathrm{P}(-1\le Z_X\le1)=0.6826$, $\mathrm{P}(-3\le Z_X\le3)=0.9974$

$$\therefore \mathrm{P}(0\le Z_X\le1)=\frac{1}{2}\times0.6826=0.3413,$$
$$\mathrm{P}(0\le Z_X\le3)=\frac{1}{2}\times0.9974=0.4987$$

$$\therefore \mathrm{P}(-3\le Z_{\overline{X}}\le-1)=\mathrm{P}(-3\le Z_X\le-1)$$
$$=\mathrm{P}(1\le Z_X\le3)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z_X\le3)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le1)$$
$$=0.4987-0.3413=0.1574$$

312 표본평균의 확률

전략 생수 1병의 용량을 X mL라 하고, 확률변수 X와 표본의 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$를 각각 표준화하여 p_1, p_2를 구한다.

풀이 생수 1병의 용량을 X mL라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(500,\ 20^2)$을 따른다.

이때 $Z_X=\frac{X-500}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$p_1=\mathrm{P}(X\ge520)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{520-500}{20}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_X\ge1)$$
$$=\mathrm{P}(Z_X\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le1)$$
$$=0.5-0.3413=0.1587$$

또, 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(500,\ \frac{20^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(500,\ \left(\frac{20}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-500}{\frac{20}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$p_2=\mathrm{P}(\overline{X}\ge480)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{480-500}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge-\sqrt{n})$$

그런데 $p_2-p_1=0.8185$이므로

$p_2=p_1+0.8185=0.1587+0.8185=0.9772$
즉, $\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge-\sqrt{n})=0.9772$이므로
$\mathrm{P}(-\sqrt{n}\le Z_{\overline{X}}\le 0)+0.5=0.9772$
$\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le\sqrt{n})+0.5=0.9772$
$\therefore \mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le\sqrt{n})=0.4772$
이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로
$\sqrt{n}=2\qquad\therefore n=4$

313 표본평균의 확률

전략 두 표본평균 $\overline{X}, \overline{Y}$를 각각 표준화한다.

풀이 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(50, 2^2)$을 따르고, 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(75, \frac{\sigma^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(75, \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-50}{2}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-75}{\frac{\sigma}{5}}$로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 53)+\mathrm{P}(\overline{Y}\le 69)=1$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{53-50}{2}\right)+\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{69-75}{\frac{\sigma}{5}}\right)=1$$

$$\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le 1.5)+\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le-\frac{30}{\sigma}\right)=1$$

$$\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le 1.5)+\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{30}{\sigma}\right)=1$$

즉, $\frac{30}{\sigma}=1.5$이므로 $\sigma=20$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(\overline{Y}\ge 71)&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{71-75}{4}\right)=\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\ge-1)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z_{\overline{Y}}\le 0)+\mathrm{P}(Z_{\overline{Y}}\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{Y}}\le 1)+0.5\\&=0.3413+0.5=0.8413\end{aligned}$$

314 표본평균의 확률 ⊕ 이항분포와 정규분포의 관계

전략 쿠키 상자에 들어 있는 쿠키 9개의 무게의 평균이 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 한 상자에 들어 있는 쿠키 9개의 평균 무게를 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60, \frac{3^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(60, 1^2)$을 따른다.
이때 $Z_{\overline{X}}=\overline{X}-60$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 이 공장에서 생산한 쿠키 9개를 담은 상자 하나가 불량품일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(9\overline{X}\le 528.48)&=\mathrm{P}(\overline{X}\le 58.72)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le 58.72-60)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le-1.28)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 1.28)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le 1.28)\\&=0.5-0.4=0.1\end{aligned}$$

한편, 쿠키 상자 900개 중에서 불량품인 상자의 수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(900, 0.1)$을 따르므로
$\mathrm{E}(Y)=900\times 0.1=90$
$\mathrm{V}(Y)=900\times 0.1\times 0.9=81$
즉, Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90, 9^2)$을 따르므로
$Z_Y=\frac{Y-90}{9}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le 72)&=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{72-90}{9}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\le-2)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

315 모평균의 추정 ⊕ 신뢰구간의 길이

전략 표준편차를 이용하여 분포의 고르기를 파악한 후, 모평균의 추정을 이용하여 두 지역 A, B의 표본의 크기를 구한다.

풀이 ㄱ. A 지역의 표준편차는 4, B 지역의 표준편차는 9이므로 표준편차가 작은 A 지역의 분포가 더 고르다. (참)

ㄴ. 두 지역 A, B의 신뢰도가 α %로 같으므로
$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 A 지역의 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$36-k\frac{4}{\sqrt{n_1}}\le m\le 36+k\frac{4}{\sqrt{n_1}}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

이 신뢰구간이 $35\le m\le 37$과 일치하므로
$k\frac{4}{\sqrt{n_1}}=1$, $\sqrt{n_1}=4k$
$\therefore n_1=16k^2$
또, B 지역의 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$42-k\frac{9}{\sqrt{n_2}}\le m\le 42+k\frac{9}{\sqrt{n_2}}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

이 신뢰구간이 $39\le m\le 45$와 일치하므로
$k\frac{9}{\sqrt{n_2}}=3$, $\sqrt{n_2}=3k$
$\therefore n_2=9k^2$
$\therefore n_1>n_2$ (거짓)

ㄷ. 신뢰도를 α %보다 크게 하면 ㉠, ㉡에서 k의 값이 더 커진다. 따라서 신뢰구간의 길이 $2k\frac{4}{\sqrt{n_1}}$, $2k\frac{9}{\sqrt{n_2}}$도 각각 더 길어진다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

316 표본평균의 확률

(1단계) 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구한다.
모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$을 따른다.
따라서 $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

(2단계) ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $f(m-1)=\mathrm{P}(m-2\le \overline{X}\le m+2)$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{m-2-m}{\frac{\sigma}{2}}\le Z\le \frac{m+2-m}{\frac{\sigma}{2}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z\le \frac{4}{\sigma}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(|Z|\le \frac{4}{\sigma}\right)$$

$$\mathrm{P}(|X-m|\le 4)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|\le \frac{4}{\sigma}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(|Z|\le \frac{4}{\sigma}\right)$$

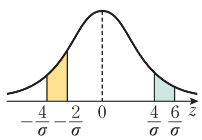
$\therefore f(m-1)=\mathrm{P}(|X-m|\le 4)$ (참)

ㄴ. $f(m)=\mathrm{P}(m-1\le \overline{X}\le m+3)$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{m-1-m}{\frac{\sigma}{2}}\le Z\le \frac{m+3-m}{\frac{\sigma}{2}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(-\frac{2}{\sigma}\le Z\le \frac{6}{\sigma}\right)$$

이때



$$\mathrm{P}\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z\le -\frac{2}{\sigma}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{2}{\sigma}\le Z\le \frac{4}{\sigma}\right)$$

$$>\mathrm{P}\left(\frac{4}{\sigma}\le Z\le \frac{6}{\sigma}\right)$$

이므로

$$f(m)=\mathrm{P}\left(-\frac{2}{\sigma}\le Z\le \frac{6}{\sigma}\right)$$

$$<\mathrm{P}\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z\le \frac{4}{\sigma}\right)$$

$$=f(m-1)$$

따라서 $t=m$일 때, 함수 $f(t)$는 최댓값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(m+k-1)$

$$=\mathrm{P}(m+k-2\le \overline{X}\le m+k+2)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{m+k-2-m}{\frac{\sigma}{2}}\le Z\le \frac{m+k+2-m}{\frac{\sigma}{2}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(2\times\frac{k-2}{\sigma}\le Z\le 2\times\frac{k+2}{\sigma}\right)$$

$f(m-k-1)$

$$=\mathrm{P}(m-k-2\le \overline{X}\le m-k+2)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{m-k-2-m}{\frac{\sigma}{2}}\le Z\le \frac{m-k+2-m}{\frac{\sigma}{2}}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(-2\times\frac{k+2}{\sigma}\le Z\le -2\times\frac{k-2}{\sigma}\right)$$

일반적으로 $a<b$인 두 실수 a, b에 대하여

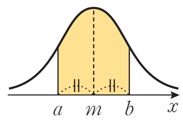
$\mathrm{P}(a\le Z\le b)=\mathrm{P}(-b\le Z\le -a)$가 성립하므로

$f(m+k-1)=f(m-k-1)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

개념 보충

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다. 따라서 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$가 최대이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{a+b}{2}=m$ (단, $b-a$는 일정)

317 모평균의 추정

(1단계) 주어진 표준정규분포표를 이용하여 신뢰도가 98 %일 때의 신뢰구간에서 d를 구한다.

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2.32)=0.49$에서

$\mathrm{P}(-2.32\le Z\le 2.32)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.32)$

$=2\times 0.49=0.98$

모평균 m에 대한 신뢰도 98 %의 신뢰구간이

$\overline{x}-d\le m\le \overline{x}+d$이므로

$d=2.32\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2단계) 주어진 신뢰구간을 이용하여 신뢰도 α %를 구한다.

모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간이

$\overline{x}-\frac{d}{2}\le m\le \overline{x}+\frac{d}{2}$이므로

$\frac{d}{2}=\frac{1}{2}\times 2.32\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.16\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.16)=0.38$에서

$\mathrm{P}(-1.16\le Z\le 1.16)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.16)$

$=2\times 0.38=0.76$

$\therefore \alpha=76$

실전 대비 마무리 문제 pp. 84~85

318 $\frac{3}{2}$ **319** ④ **320** ② **321** 0.0228 **322** ④

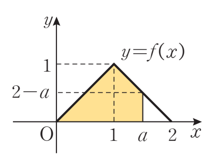
323 $a=\frac{5}{36}$, $b=\frac{3}{8}$, $c=\frac{5}{36}$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{12}$ **324** ②

325 64

318 연속확률변수와 확률밀도함수

전략 $\mathrm{P}(X\le a)=1-\mathrm{P}(a\le X\le 2)$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $\mathrm{P}(X\le a)$는 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로 $\mathrm{P}(X\le a)=\frac{7}{8}$에서



$1-\mathrm{P}(a\le X\le 2)=\frac{7}{8}$

$1-\frac{1}{2}\times(2-a)\times(2-a)=\frac{7}{8}$

$4a^2-16a+15=0$, $(2a-3)(2a-5)=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ ($\because a<2$)

319 **이산확률변수의 기댓값(평균), 분산, 표준편차**

전략 X의 확률분포표를 나타내고 $E(X)$를 구한다.

풀이 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 최댓값이

(i) 1인 경우는

{①, ❶}의 1가지

(ii) 3인 경우는

{①, ③}, {①, ❸}, {❶, ③}, {❶, ❸}, {❸, ③}의 5가지

(iii) 5인 경우는

{①, ⑤}, {①, ❺}, {❶, ⑤}, {❶, ❺}, {③, ⑤}, {③, ❺}, {❸, ⑤}, {❸, ❺}, {⑤, ❺}의 9가지

이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 3, 5이고, 그 확률은 각각

$P(X=1)=\frac{1}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$

$P(X=3)=\frac{5}{{}_6C_2}=\frac{1}{3}$

$P(X=5)=\frac{9}{{}_6C_2}=\frac{3}{5}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{15}+3\times\frac{1}{3}+5\times\frac{3}{5}=\frac{61}{15}$

이므로

$E(15X-1)=15E(X)-1=15\times\frac{61}{15}-1=60$

320 **이항분포**

전략 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때, $E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$임을 이용한다.

풀이 전구가 들어 있는 상자에서 한 개의 전구를 꺼낼 때 불량인 전구가 나올 확률은 $\frac{4}{x}$

확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{4}{x}\right)$를 따르므로

$E(X)=n\times\frac{4}{x}=30$ …… ㉠

$V(X)=n\times\frac{4}{x}\times\frac{x-4}{x}=10$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$30\times\frac{x-4}{x}=10,\ 3x-12=x \qquad \therefore x=6$

$x=6$을 ㉠에 대입하면

$\frac{4}{6}n=30 \qquad \therefore n=45$

$\therefore n+x=51$

321 **정규분포**

전략 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로

$P(X\le 80)=0.5$에서 $m=80$ …… ㉠

$P\left(X\ge\frac{11}{10}m\right)=0.1587$이므로

$P\left(m\le X\le\frac{11}{10}m\right)=0.5-0.1587=0.3413$

이때 $P(m\le X\le m+1.0\sigma)=0.3413$이므로

$\frac{11}{10}m=m+1.0\sigma$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{11}{10}\times 80=80+\sigma \qquad \therefore \sigma=8$

$\therefore P(X\ge 96)=0.5-P(80\le X\le 80+2.0\times 8)$

$=0.5-P(m\le X\le m+2.0\sigma)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

322 **이항분포와 정규분포의 관계**

전략 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때, $E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$임을 이용하여 X가 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 확률변수 X는 이항분포 $B\left(450, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=450\times\frac{1}{3}=150,\ V(X)=450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=100$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $N(150, 10^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\ge 100+2k)=0.9332$에서

$P\left(Z\ge\frac{100+2k-150}{10}\right)=0.9332$

$P\left(Z\ge\frac{k}{5}-5\right)=0.9332$

$0.5+P\left(\frac{k}{5}-5\le Z\le 0\right)=0.9332$

$0.5+P\left(0\le Z\le 5-\frac{k}{5}\right)=0.9332$

$\therefore P\left(0\le Z\le 5-\frac{k}{5}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$5-\frac{k}{5}=1.5 \qquad \therefore k=17.5$

323 **표본평균의 평균, 분산, 표준편차**

전략 $\overline{X}=1.5,\ \overline{X}=2,\ \overline{X}=2.5$일 때의 확률을 각각 구한 후, $V(\overline{X})=\frac{V(X)}{2}$임을 이용한다.

풀이 크기가 2인 표본을 각각 X_1, X_2라 하면

(i) $\overline{X}=1.5$인 경우: (X_1, X_2)가 $(1, 2), (2, 1)$이므로

$P(\overline{X}=1.5)=\frac{5}{12}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{36}$

$\therefore a=\frac{5}{36}$

(ii) $\overline{X}=2$인 경우: (X_1, X_2)가 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$이므로

$P(\overline{X}=2)=\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}=\frac{3}{8}$

$\therefore b=\frac{3}{8}$

(iii) $\overline{X}=2.5$인 경우: (X_1, X_2)가 $(2, 3)$, $(3, 2)$이므로

$P(\overline{X}=2.5)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{12}+\frac{5}{12}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$

$\therefore c=\frac{5}{36}$

확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{5}{12}=2$,

$E(X^2)=1^2\times\frac{5}{12}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{5}{12}=\frac{29}{6}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{29}{6}-2^2=\frac{5}{6}$

$\therefore V(\overline{X})=\frac{V(X)}{2}=\frac{\frac{5}{6}}{2}=\frac{5}{12}$

324 표본평균의 확률

전략 한 상자에 들어 있는 귤 16개의 무게의 평균이 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 농장에서 재배되는 귤 1개의 무게를 확률변수 X g이라 하면 X는 정규분포 $N(75, 8^2)$을 따른다.

이때 임의로 선택한 귤 16개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(75, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(75, 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\overline{X}-75}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 귤 16개를 포장한 한 상자의 무게가 1280 g 이상일 확률은

$$\begin{aligned}P(16\overline{X}\ge1280)&=P(\overline{X}\ge80)\\&=P\left(Z\ge\frac{80-75}{2}\right)\\&=P(Z\ge2.5)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2.5)\\&=0.5-0.4938=0.0062\end{aligned}$$

이므로 $\alpha=0.62$

325 모평균의 추정

전략 신뢰도 α %로 모평균 m을 추정할 때, 모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 차는 $|m-\overline{X}|\le k\frac{\sigma}{\sqrt{256}}$ $\left(P(|Z|\le k)=\frac{\sigma}{100}\right)$임을 이용한다.

풀이 표본의 크기가 256인 표본평균을 $\overline{X_1}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{X_1}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{256}}\le m\le\overline{X_1}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{256}}$

$-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{256}}\le m-\overline{X_1}\le2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{256}}$

$\therefore |m-\overline{X_1}|\le2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{256}}$

즉, 모평균과 표본평균의 차 $|m-\overline{X_1}|$의 최댓값이 l이므로

$l=2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{256}}$ ······ ㉠

또, 표본의 크기가 n인 표본평균을 $\overline{X_2}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{X_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X_2}\le2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore |m-\overline{X_2}|\le2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ······ ㉡

즉, 모평균과 표본평균의 차 $|m-\overline{X_2}|$의 최댓값을 l'이라 하면

$l'=2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 $l'\le2l$이어야 하므로 ㉠, ㉡에서

$2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{256}}$

$\sqrt{n}\ge8$ $\therefore n\ge64$

따라서 n의 최솟값은 64이다.

memo

memo