

1등급 만들기

기하
334_제

바른답 · 알찬풀이

I 이차곡선

II 포물선

교과서에서 뽑은 기본 문제

p. 8

- 001** (1) $y^2=4x$ (2) $x^2=-20y$
002 (1) 초점의 좌표: $(3, 0)$, 준선의 방정식: $x=-3$
 (2) 초점의 좌표: $(0, -\frac{3}{4})$, 준선의 방정식: $y=\frac{3}{4}$
003 (1) $k < \frac{1}{2}$ (2) $k = \frac{1}{2}$ (3) $k > \frac{1}{2}$
004 (1) $y = -x - 2$ (2) $y = -2x + \frac{1}{2}$ (3) $y = x - 4$

- 001** (1) $y^2=4 \times 1 \times x=4x$
 (2) $x^2=4 \times (-5) \times y=-20y$

- 002** (1) $y^2=12x=4 \times 3x$ 이므로
 초점의 좌표는 $(3, 0)$
 준선의 방정식은 $x=-3$
 (2) $x^2=-3y=4 \times (-\frac{3}{4})y$ 이므로
 초점의 좌표는 $(0, -\frac{3}{4})$
 준선의 방정식은 $y=\frac{3}{4}$

- 003** $y=x+k$ 를 $y^2=2x$ 에 대입하여 정리하면
 $x^2+2(k-1)x+k^2=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(k-1)^2-k^2=-2k+1$
 (1) $\frac{D}{4}>0$, 즉 $-2k+1>0$ 에서 $k<\frac{1}{2}$
 (2) $\frac{D}{4}=0$, 즉 $-2k+1=0$ 에서 $k=\frac{1}{2}$
 (3) $\frac{D}{4}<0$, 즉 $-2k+1<0$ 에서 $k>\frac{1}{2}$

- 004** (1) $y^2=8x=4 \times 2x$ 이므로 구하는 직선의 방정식은
 $y=-x+\frac{2}{-1}$
 $\therefore y=-x-2$
 (2) $y^2=-4x=4 \times (-1)x$ 이므로 구하는 접선의 방정식은
 $1 \times y=2 \times (-1) \times \left\{x+\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}$
 $\therefore y=-2x+\frac{1}{2}$
 (3) $x^2=16y=4 \times 4y$ 이므로 구하는 접선의 방정식은
 $8 \times x=2 \times 4 \times (y+4)$, $8x=8y+32$
 $\therefore y=x-4$

유형 분석 기출 문제

pp. 9~13

- 005** ③ **006** ① **007** π **008** ⑤ **009** ①
010 4 **011** $\frac{3}{2}$ **012** 16 **013** $\frac{11}{2}$ **014** 13
015 9 **016** ② **017** $x^2=6y-9$ **018** ⑤
019 $-\frac{3}{2}$ **020** $m>\frac{1}{2}$ **021** ② **022** ⑤ **023** $-\sqrt{3}$
024 $\frac{7\sqrt{2}}{8}$ **025** $y=-2x+\frac{1}{2}$ **026** ③
027 $-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}$ **028** ① **029** 2

- 005** 초점이 $F(4, 0)$ 이고 꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식은
 $y^2=4 \times 4x$, 즉 $y^2=16x$
 이 포물선이 점 $(a, -2)$ 를 지나므로
 $(-2)^2=16a \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

- 006** 점 $P(x, y)$ 가 나타내는 도형은 초점이 $A(0, -2)$, 준선이
 $y=2$ 인 포물선이므로 그 방정식은
 $x^2=4 \times (-2)y=-8y$
 이 포물선이 점 $(-4, a)$ 를 지나므로
 $(-4)^2=-8a \quad \therefore a=-2$

다른풀이 점 $P(x, y)$ 에서 직선 $y=2$ 에 내린 수선의 발을 H
 라 하면 $\overline{PA}=\overline{PH}$ 이므로
 $\sqrt{x^2+(y+2)^2}=|y-2|$
 위의 식의 양변을 제곱하면
 $x^2+y^2+4y+4=y^2-4y+4 \quad \therefore x^2=-8y$
 이 식에 $x=-4, y=a$ 를 대입하면
 $(-4)^2=-8a \quad \therefore a=-2$

- 007** 포물선 $y^2=2x=4 \times \frac{1}{2}x$ 의
 초점의 좌표는 $(\frac{1}{2}, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{2}$ ㉠
 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ ㉡
 따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi \times 1^2=\pi$ ㉢

채점 기준	배점 비율
㉠ 주어진 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식 구하기	40%
㉡ 원의 반지름의 길이 구하기	30%
㉢ 원의 넓이 구하기	30%

- 008** 초점이 $F(0, -6)$ 이고 준선이 $y=6$ 인 포물선의 방정식은
 $x^2=4 \times (-6)y \quad \therefore x^2=-24y$
 이 포물선의 초점을 지나고 x 축에 평행한 직선의 방정식은
 $y=-6$ 이므로 이 직선과 포물선의 교점의 x 좌표는
 $x^2=-24 \times (-6)=144 \quad \therefore x=-12$ 또는 $x=12$
 따라서 두 점 A, B 의 좌표가 $(-12, -6), (12, -6)$ 이므로
 $\overline{AB}=|12-(-12)|=24$

- 009** 포물선 $y^2 = -8x$ 의 초점의 좌표는 $(-2, 0)$
 포물선 $y^2 = 4(x-a)$ 는 포물선 $y^2 = 4x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로
 포물선 $y^2 = 4(x-a)$ 의 초점의 좌표는 $(1+a, 0)$
 따라서 $1+a = -2$ 이므로 $a = -3$

- 010** 주어진 포물선은 초점의 좌표가 $(2, 0)$, 준선의 방정식이 $x = -2$ 인 포물선 $y^2 = 4 \times 2x = 8x$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
 따라서 주어진 포물선의 방정식은
 $(y-2)^2 = 8(x-2)$
 이 포물선이 점 $(a, 6)$ 을 지나므로
 $4^2 = 8(a-2), 8a = 32 \quad \therefore a = 4$

- 011** $x^2 - 4x - 2y + 2 = 0$ 에서 $(x-2)^2 = 2(y+1)$
 즉, 주어진 포물선은 포물선 $x^2 = 2y$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. ㉠
 포물선 $x^2 = 2y$ 의 초점의 좌표는 $(0, \frac{1}{2})$, 준선의 방정식은 $y = -\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는
 $(0+2, \frac{1}{2}-1)$, 즉 $(2, -\frac{1}{2})$
 준선의 방정식은 $y = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ ㉡
 따라서 $a=2, b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{3}{2}$ 이므로
 $abc = 2 \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$ ㉢

채점 기준	배점 비율
㉠ 주어진 포물선의 식을 변형하여 어떤 포물선을 평행이동한 것인지 알기	30%
㉡ 주어진 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식 구하기	50%
㉢ abc 의 값 구하기	20%

1등급 방법

포물선 $x^2 = 4py$ ($p \neq 0$)를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 $(x-m)^2 = 4p(y-n)$ 이고, 평행이동한 포물선의 초점의 좌표는 $(m, p+n)$, 준선의 방정식은 $y = -p+n$, 꼭짓점의 좌표는 (m, n) 이다.

- 012** 포물선 $y^2 = 16x$ 의 초점을 F라 하면 F(4, 0)이고 점 A에서 준선 $x = -4$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면
 $\overline{AF} = \overline{AH}$
 $\overline{AF} = 20$ 이므로 $\overline{AH} = 20$
 $|a - (-4)| = 20, a + 4 = \pm 20$
 $\therefore a = -24$ 또는 $a = 16$
 그런데 $a \geq 0$ 이므로 $a = 16$

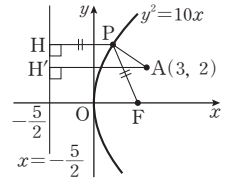
- 013** 포물선 $y^2 = 10x = 4 \times \frac{5}{2}x$ 의

초점 F의 좌표는 $(\frac{5}{2}, 0)$, 준선의 방정식은 $x = -\frac{5}{2}$

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선 $x = -\frac{5}{2}$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH} \geq \overline{AH'} = 3 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 최솟값은 $\frac{11}{2}$ 이다.



- 014** 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점을 F라 하면

초점 F의 좌표는 $(2, 0)$, 준선의 방정식은 $x = -2$

이때 주어진 직선은 이 포물선의 초점을 지난다.

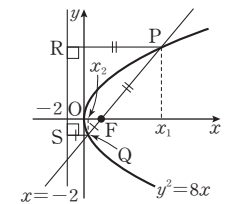
오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 라 하고 두 점 P, Q에서 준선 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PR}, \overline{QF} = \overline{QS} \text{이므로}$$

$$\overline{PQ} = \overline{PF} + \overline{QF} = \overline{PR} + \overline{QS}$$

$$17 = (x_1 + 2) + (x_2 + 2) \quad \therefore x_1 + x_2 = 13$$

따라서 두 점 P, Q의 x 좌표의 합은 13이다.



- 015** 포물선 $y^2 = 6x = 4 \times \frac{3}{2}x$ 의

초점 F의 좌표는 $(\frac{3}{2}, 0)$, 준선의 방정식은 $x = -\frac{3}{2}$ ㉠

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C

에서 준선 $x = -\frac{3}{2}$ 에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AA'}, \overline{BF} = \overline{BB'}, \overline{CF} = \overline{CC'}$$

세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 x_1, x_2, x_3 이라 하면

$$\overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF} = \overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'}$$

$$= (x_1 + \frac{3}{2}) + (x_2 + \frac{3}{2}) + (x_3 + \frac{3}{2})$$

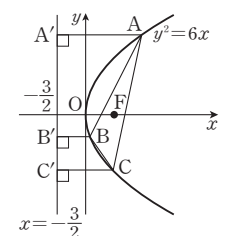
$$= x_1 + x_2 + x_3 + \frac{9}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

삼각형 ABC의 무게중심이 포물선의 초점과 일치하므로

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{3}{2} \quad \therefore x_1 + x_2 + x_3 = \frac{9}{2}$$

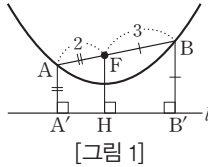
$$\therefore \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF} = x_1 + x_2 + x_3 + \frac{9}{2}$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9 \quad \dots\dots ㉢$$



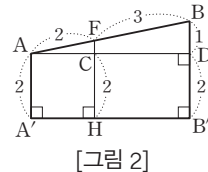
채점 기준	배점 비율
㉠ 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식 구하기	20%
㉡ $\overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF}$ 를 x_1, x_2, x_3 에 대한 식으로 나타내기	40%
㉢ $\overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF}$ 의 값 구하기	40%

- 016** [그림 1]과 같이 두 점 A, B에서 준선 l 에 내린 수선의 발을 각각 A' , B' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여



[그림 1]

$\overline{AA'} = \overline{AF} = 2$, $\overline{BB'} = \overline{BF} = 3$
 이때 $\overline{AA'} \parallel \overline{FH} \parallel \overline{BB'}$ 이므로
 [그림 2]와 같이 점 A에서 $\overline{BB'}$ 에 내린 수선의 발을 D라 하고 $\overline{AD}$ 와 $\overline{FH}$ 가 만나는 점을 C라 하면
 $\overline{AA'} = \overline{CH} = \overline{DB'} = 2$, $\overline{BD} = 1$
 $\triangle AFC \sim \triangle ABD$ (AA 닮음)이므로
 $\overline{AF} : \overline{AB} = \overline{FC} : \overline{BD}$, $2 : 5 = \overline{FC} : 1 \quad \therefore \overline{FC} = \frac{2}{5}$



[그림 2]

$$\therefore \overline{FH} = \overline{FC} + \overline{CH} = \frac{2}{5} + 2 = \frac{12}{5}$$

- 017** 점 $P(x, y)$ 에서 점 $A(0, 3)$ 까지의 거리와 x 축까지의 거리가 서로 같으므로

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = |y|$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 \quad \therefore x^2 = 6y - 9$$

- 018** $x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$ 에서 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

점 P 의 좌표를 (x_1, y_1) ($x_1 > 0$)이라 하면 중심이 점 P 인 원은 y 축에 접하므로 원의 반지름의 길이가 x_1 이다.

점 $P(x_1, y_1)$ 에서 점 $(3, 0)$ 까지의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합인 $x_1 + 2$ 와 같으므로

$$\sqrt{(x_1-3)^2 + y_1^2} = x_1 + 2$$

위의 식의 양변을 제곱하면

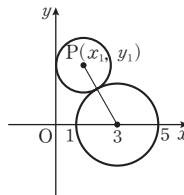
$$x_1^2 - 6x_1 + 9 + y_1^2 = x_1^2 + 4x_1 + 4$$

$$y_1^2 = 10x_1 - 5$$

$$\therefore y_1^2 = 10\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{5}{2}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)$$

이 포물선의 초점의 좌표는 $\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}, 0\right)$, 즉 $(3, 0)$

따라서 $a=3$, $b=0$ 이므로 $a^2 + b^2 = 9$



- 019** 직선 $y=x$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=x-k$ $\therefore x=y+k$

이것을 $y^2=6x$ 에 대입하면

$$y^2 = 6(y+k) \quad \therefore y^2 - 6y - 6k = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \times (-6k) = 0$$

$$6k = -9 \quad \therefore k = -\frac{3}{2}$$

- 020** $y=mx+2$ 를 $y^2=4x$ 에 대입하면

$$(mx+2)^2 = 4x, \quad m^2x^2 + 4mx + 4 - 4x = 0$$

$$\therefore m^2x^2 + 4(m-1)x + 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

- (i) $m=0$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $x=1$

직선 $y=2$ 는 포물선 $y^2=4x$ 와 점 $(1, 2)$ 에서 만난다.

- (ii) $m \neq 0$ 일 때, 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{2(m-1)\}^2 - m^2 \times 4 < 0$$

$$-2m + 1 < 0 \quad \therefore m > \frac{1}{2}$$

- (i), (ii)에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는 $m > \frac{1}{2}$

- 021** $A \cap B \neq \emptyset$ 이므로 포물선 $x^2 = -2y$ 와 직선 $y=x+k$ 는 만나야 한다.

$y=x+k$ 를 $x^2 = -2y$ 에 대입하면

$$x^2 = -2(x+k) \quad \therefore x^2 + 2x + 2k = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 1 \times 2k \geq 0$$

$$-2k \geq -1 \quad \therefore k \leq \frac{1}{2}$$

따라서 k 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

- 022** 직선 $y=-2x+3$ 에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로 포물선

$y^2=10x=4 \times \frac{5}{2}x$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 5$$

이 직선이 점 $(-4, a)$ 를 지나므로

$$a = \frac{1}{2} \times (-4) + 5 = 3$$

- 023** x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ $\dots\dots \textcircled{1}$

포물선 $y=-12x=4 \times (-3)x$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x + \frac{-3}{\sqrt{3}} \quad \therefore y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이 직선이 점 $(0, a)$ 를 지나므로

$$a = -\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

채점 기준	배점 비율
㉠ 직선의 기울기 구하기	30%
㉡ 직선의 방정식 구하기	40%
㉢ a 의 값 구하기	30%

024 포물선 $y^2=x$ 위의 점과 직선 $x+y+2=0$ 사이의 거리의 최솟값은 직선 $x+y+2=0$ 과 평행한 포물선의 접선과 직선 $x+y+2=0$ 사이의 거리와 같다.

직선 $x+y+2=0$, 즉 $y=-x-2$ 와 평행한 직선의 기울기는 -1 이므로 포물선 $y^2=x=4 \times \frac{1}{4}x$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y=-x+\frac{1}{4} \quad \therefore y=-x-\frac{1}{4}$$

이 직선 위의 점 $(0, -\frac{1}{4})$ 과 직선 $x+y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-\frac{1}{4}+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{8}$$

따라서 구하는 거리의 최솟값은 $\frac{7\sqrt{2}}{8}$ 이다.

025 포물선 $x^2=2y=4 \times \frac{1}{2}y$ 의 초점의 좌표는 $(0, \frac{1}{2})$

점 $(-2, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-2x=2 \times \frac{1}{2} \times (y+2) \quad \therefore y=-2x-2$$

이 직선과 평행하고 점 $(0, \frac{1}{2})$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=-2x+\frac{1}{2}$$

1등급 방법

포물선 $x^2=4px$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $x_1x=2p(y+y_1)$

026 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $A(4, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4y=2 \times 1 \times (x+4) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 포물선 $y^2=4x$ 의 준선의 방정식은 $x=-1$ 이므로 $D(-1, 0)$

①에 $x=-1$ 을 대입하면 $y=\frac{3}{2}$ 이므로 $B(-1, \frac{3}{2})$

①에 $y=0$ 을 대입하면 $x=-4$ 이므로 $C(-4, 0)$

따라서 $\triangle BCD$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

027 점 $(-2, 0)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m ($m \neq 0$)이라 하면 포물선 $y^2=12x=4 \times 3x$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{3}{m}$$

이 직선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0=-2m+\frac{3}{m}, 2m^2-3=0$$

$$m^2=\frac{3}{2} \quad \therefore m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

028 점 $(a, 1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m ($m \neq 0$)이라 하면 포물선 $y^2=8x=4 \times 2x$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{2}{m}$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1=am+\frac{2}{m}, am^2-m+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로 두 접선의 기울기의 곱이 -1 이다. 즉, m 에 대한 이차방정식 ①의 두 실근의 곱이 -1 이므로

$$\frac{2}{a}=-1 \quad \therefore a=-2$$

029 포물선 $x^2=ky=4 \times \frac{k}{4}y$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2 \times \frac{k}{4}(y+y_1)$$

$$\therefore x_1x=\frac{1}{2}k(y+y_1)$$

이 직선이 점 $P(0, -2)$ 를 지나므로

$$0=\frac{1}{2}k(-2+y_1)$$

$$\therefore y_1=2 (\because k>0)$$

따라서 두 점 A, B의 y 좌표가 모두 2이므로 $x^2=2k$ 에서

$$x=-\sqrt{2k} \text{ 또는 } x=\sqrt{2k}$$

즉, 두 점 A, B의 x 좌표가 $-\sqrt{2k}, \sqrt{2k}$ 이다. $\dots\dots \textcircled{2}$

이때 $\triangle PAB$ 의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2} \times \{2-(-2)\} \times 2\sqrt{2k}=8$$

$$\sqrt{2k}=2, 2k=4$$

$$\therefore k=2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

채점 기준	배점 비율
② 두 점의 좌표 구하기	70%
③ $\triangle PAB$ 의 넓이 구하기	30%

실력 완성 1등급 문제

pp. 14~15

030 125	031 ④	032 ④	033 128	034 $-1, 0, 1$
035 ⑤	036 ②	037 ⑤	038 16	

030 포물선의 방정식 $\oplus$ 포물선의 평행이동

전략 초점의 좌표가 $(p+m, 0)$, 준선의 방정식이 $x=-p+m$ 인 포물선은 포물선 $y^2=4px$ 를 평행이동한 것임을 이용한다.

풀이 원 $(x-3)^2+y^2=1$ 의 중심을 A라 하면

A(3, 0)

즉, 점 P가 나타내는 도형은 초점의 좌표가 (3, 0), 준선의 방정식이 $x=-2$ 인 포물선이다.

이때 이 포물선은 초점의 좌표가 $(\frac{5}{2}, 0)$, 준선의 방정식이

$x=-\frac{5}{2}$ 인 포물선 $y^2=10x$ 를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행

이동한 것이므로 그 방정식은

$$y^2=10\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y^2-10x+5=0$$

따라서 $a=-10$, $b=5$ 이므로

$$a^2+b^2=(-10)^2+5^2=125$$

다른풀이 원 $(x-3)^2+y^2=1$ 의 중심을 A라 하면

A(3, 0)

점 P에서 직선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PA}=\overline{PH} \text{이므로}$$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=|x-(-2)|$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$x^2-6x+9+y^2=x^2+4x+4$$

$$\therefore y^2-10x+5=0$$

따라서 $a=-10$, $b=5$ 이므로

$$a^2+b^2=125$$

031 포물선의 평행이동

전략 포물선 $(x-m)^2=4p(y-n)$ 은 포물선 $x^2=4py$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것임을 이용한다.

풀이 $x^2-2x-8y-3=0$ 에서

$$(x-1)^2=8\left(y+\frac{1}{2}\right)$$

ㄱ. 주어진 포물선은 포물선 $x^2=8y$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 포물선 $x^2=8y$ 의 꼭짓점은 원점이므로 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(0+1, 0-\frac{1}{2})$, 즉 $(1, -\frac{1}{2})$

ㄷ. 포물선 $x^2=8y$ 의 초점의 좌표는 (0, 2)이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$$(0+1, 2-\frac{1}{2}), \text{ 즉 } (1, \frac{3}{2})$$

ㄹ. 포물선 $x^2=8y$ 의 준선의 방정식은 $y=-2$ 이므로 주어진

$$\text{포물선의 준선의 방정식은 } y=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

032 포물선의 정의의 활용

전략 주어진 포물선의 초점의 좌표를 구하고, 세 점 A, B, P를 좌표평면 위에 나타낸다.

풀이 포물선 $y^2=16x=4 \times 4x$ 의 초점의 좌표는 (4, 0)이므로 점 A(4, 0)은 주어진 포물선의 초점이고, 준선의 방정식은 $x=-4$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, B에서 준선 $x=-4$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AP}=\overline{HP}$ 이므로

$$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{HP}+\overline{PB}$$

$$\geq \overline{BH'}$$

$$=7+4=11$$

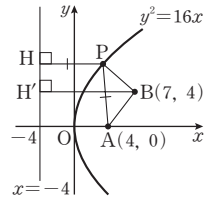
즉, $\triangle ABP$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{AB}+\overline{AP}+\overline{PB} \geq \overline{AB}+\overline{BH'}$$

$$=\sqrt{(7-4)^2+4^2}+11$$

$$=5+11=16$$

따라서 $\triangle ABP$ 의 둘레의 길이의 최솟값은 16이다.



033 포물선의 정의의 활용

전략 포물선의 정의를 이용하여 $\overline{AB}$ 의 길이를 구한다.

풀이 주어진 포물선의 준선을 l 이라 하고, 포물선 위의 두 점 A, B에서 준선 l 에 내린 수선의 발을 각각 A', B', x 축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자.

정사각형의 한 변의 길이가 2이므로

$$\overline{AF}=2\sqrt{2}$$

또, 점 A가 포물선 위의 점이므로 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AA'}=\overline{AF}=2\sqrt{2}$$

$\overline{BF}=k$ ($k>0$)라 하면 $\triangle BQF$ 는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{QF}=\overline{BF} \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}k \text{이다. 이때 점 B는 포물선 위의 점}$$

이므로 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{BB'}=\overline{BF}=k$$

위의 그림에서 $\overline{AA'}=\overline{BB'}+\overline{QF}+\overline{FP}$ 이므로

$$2\sqrt{2}=k+\frac{1}{\sqrt{2}}k+2$$

$$(\sqrt{2}+1)k=4-2\sqrt{2}$$

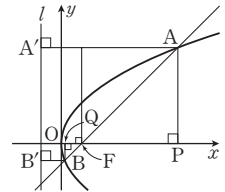
$$\therefore k=\frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\frac{(4-2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=-8+6\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=2\sqrt{2}+k$$

$$=2\sqrt{2}+(-8+6\sqrt{2})=-8+8\sqrt{2}$$

따라서 $a=-8$, $b=8$ 이므로

$$a^2+b^2=(-8)^2+8^2=128$$



034 포물선과 직선의 위치 관계

전략 직선과 포물선의 식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 D가 D=0임을 이용한다.

풀이 $y=m(x+2)$ 를 $y^2=8x$ 에 대입하면

$$\{m(x+2)\}^2=8x$$

$$m^2x^2+2(2m^2-4)x+4m^2=0$$

..... ㉠

(i) $m=0$ 일 때, ㉠에서 $x=0$

포물선 $y^2=8x$ 와 직선 $y=0$ 은 점 (0, 0)에서 만난다.

(ii) $m \neq 0$ 일 때, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

02 타원

교과서에서 뽑은 기출 문제

p. 16

039 (1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ (2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

040 (1) 초점의 좌표: (3, 0), (-3, 0), 장축의 길이: 10,
단축의 길이: 8

(2) 초점의 좌표: (0, 2), (0, -2), 장축의 길이: $2\sqrt{6}$,
단축의 길이: $2\sqrt{2}$

041 (1) $-2 < k < 2$ (2) $k = -2$ 또는 $k = 2$ (3) $k < -2$ 또는 $k > 2$

042 (1) $y = x \pm 3$ (2) $y = -x + 4$

039 (1) 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하면

$$2a = 8 \text{에서 } a = 4$$

$$b^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

$$\therefore \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

(2) 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)이라 하면

$$2b = 10 \text{에서 } b = 5$$

$$a^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$\therefore \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

040 (1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

$$\sqrt{25 - 16} = 3 \text{이므로 초점의 좌표는 } (3, 0), (-3, 0)$$

$$\text{장축의 길이는 } 2 \times 5 = 10$$

$$\text{단축의 길이는 } 2 \times 4 = 8$$

(2) $3x^2 + y^2 = 6$ 에서 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$, 즉 $\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$

$$\sqrt{6 - 2} = 2 \text{이므로 초점의 좌표는 } (0, 2), (0, -2)$$

$$\text{장축의 길이는 } 2 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{단축의 길이는 } 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

041 $y = x + k$ 를 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$4x^2 + 6kx + 3k^2 - 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (3k)^2 - 4 \times (3k^2 - 3) = -3k^2 + 12$$

(1) $\frac{D}{4} > 0$, 즉 $-3k^2 + 12 > 0$ 에서 $k^2 - 4 < 0$

$$(k+2)(k-2) < 0 \quad \therefore -2 < k < 2$$

(2) $\frac{D}{4} = 0$, 즉 $-3k^2 + 12 = 0$ 에서 $k^2 - 4 = 0$

$$(k+2)(k-2) = 0 \quad \therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 2$$

(3) $\frac{D}{4} < 0$, 즉 $-3k^2 + 12 < 0$ 에서 $k^2 - 4 > 0$

$$(k+2)(k-2) > 0 \quad \therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 2$$

042 (1) 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{6 \times 1^2 + 3} \quad \therefore y = x \pm 3$$

(2) 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 (1, 3)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x}{4} + \frac{3y}{12} = 1 \quad \therefore y = -x + 4$$

유형 분석 기출 문제

pp. 17~21

043 ⑤ 044 ② 045 13 046 ⑤ 047 $4\sqrt{10}$

048 ⑤ 049 ① 050 26 051 2 052 46

053 ② 054 64 055 ⑤ 056 29 057 ③

058 34 059 ③ 060 $m < -\sqrt{2}$ 또는 $m > \sqrt{2}$

061 $y = 2x \pm 3$ 062 $4\sqrt{2}$ 063 ④ 064 ③

065 25 066 20 067 23

043 $\overline{AP} + \overline{BP} = 26$ 을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 타원
이고, 두 점 A(5, 0), B(-5, 0)은 이 타원의 초점이다.

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하면

$$2a = 26 \text{에서 } a = 13$$

$$b^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

따라서 구하는 도형의 방정식은

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

044 $9x^2 + 16y^2 = 144$ 에서 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$\sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \text{이므로 초점의 좌표는 } (\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0)$$

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하면

이 타원이 점 (3, 0)을 지나므로

$$\frac{9}{a^2} = 1 \quad \therefore a^2 = 9$$

$$b^2 = 9 - 7 = 2$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$$

045 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)이라 하면

초점의 좌표가 (0, 6), (0, -6)이므로

$$b^2 - a^2 = 6^2 \quad \therefore (b+a)(b-a) = 36 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

장축과 단축의 길이의 차이가 8이므로

$$2b - 2a = 8 \quad \therefore b - a = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = \frac{5}{2}, b = \frac{13}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\therefore \overline{PF} + \overline{PF'} = 2b = 2 \times \frac{13}{2} = 13 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

채점 기준	배점 비율
㉠ a, b 사이의 관계식 구하기	30%
㉡ b 의 값 구하기	30%
㉢ $\overline{PF} + \overline{PF'}$ 의 값 구하기	40%

046 $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{49} = 1$ 에서 $\frac{x^2}{(2\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1$

- ① 중심은 장축과 단축의 교점이므로 원점이다.
 ② 장축의 길이는 $2 \times 7 = 14$
 ③ 단축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$
 ④ $\sqrt{49-24} = 5$ 이므로 초점의 좌표는 $(0, 5), (0, -5)$
 ⑤ 타원과 y 축과의 교점의 좌표는 $(0, 7), (0, -7)$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

1등급 비법

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 대하여

	$a > b > 0$ 일 때	$b > a > 0$ 일 때
초점의 좌표	$(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$	$(0, \pm\sqrt{b^2-a^2})$
장축의 길이	$2a$	$2b$
단축의 길이	$2b$	$2a$

047 주어진 타원의 장축의 길이가 14이므로

$2|a| = 14 \quad \therefore |a| = 7$ ㉠
 $\sqrt{7^2-9} = 2\sqrt{10}$ 이므로 두 초점의 좌표는 $(2\sqrt{10}, 0), (-2\sqrt{10}, 0)$ ㉡
 따라서 두 초점 사이의 거리는 $2 \times 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$ ㉢

채점 기준	배점 비율
㉠ $ a $ 의 값 구하기	35%
㉡ 두 초점의 좌표 구하기	35%
㉢ 두 초점 사이의 거리 구하기	30%

048 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하면 실의 길이가 100으로 일정하므로 타원의 장축의 길이가 100이다. 즉, $2a = 100 \quad \therefore a = 50$
 이때 $\overline{FF'} = 60$ 이므로 $F(30, 0), F'(-30, 0)$
 $b^2 = 50^2 - 30^2 = 1600 \quad \therefore b = 40$ ($\because b > 0$)
 따라서 구하는 단축의 길이는 $2b = 2 \times 40 = 80$

049 타원 $\frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 은 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 초점의 좌표는 $(\sqrt{a-4}, 0), (-\sqrt{a-4}, 0)$

이므로 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(\sqrt{a-4}+2, 2), (-\sqrt{a-4}+2, 2)$

이 점은 두 점 $(6, b), (-2, b)$ 와 일치해야 하므로

$\sqrt{a-4}+2=6, -\sqrt{a-4}+2=-2, b=2$

$\sqrt{a-4}+2=6$ 에서 $\sqrt{a-4}=4$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a-4=16$

$\therefore a=20$

따라서 $a=20, b=2$ 이므로 $ab=40$

참고 $-\sqrt{a-4}+2=-2$ 에 $a=20$ 을 대입해도 성립한다.

다른풀이 두 초점의 좌표가 $(6, b), (-2, b)$ 인 타원

$\frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축

의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 두 초점의 좌표가

$(4, b-2), (-4, b-2)$ 인 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{4} = 1$ 이 된다.

이때 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 두 초점의 좌표는

$(\sqrt{a-4}, 0), (-\sqrt{a-4}, 0)$ 이므로

$\sqrt{a-4}=4, b-2=0$ 에서 $a=20, b=2$

$\therefore ab=40$

1등급 비법

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의

방향으로 n 만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ 이고, 평행이동한 타원의 초점의 좌표는 $(\sqrt{a^2-b^2}+m, n), (-\sqrt{a^2-b^2}+m, n)$, 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 $2b$ 이다.

050 주어진 조건을 만족시키는 타원은 오

른쪽 그림과 같다. 이 타원은 중심이 원점이고 장축의 길이가 8, 단축의 길이가 6인 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축

의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 타원의 방정식은 $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ 이므로

$a=4, b=16, c=-3, d=9$

$\therefore a+b+c+d=26$

051 $x^2+2y^2+6x-4y+3=0$ 에서

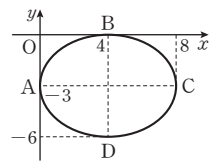
$(x^2+6x+9)+2(y^2-2y+1)=8$

$\therefore \frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -3

만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{8-4}=2$ 이므로 이 타원의 초점의 좌표는



(2, 0), (-2, 0)

주어진 타원의 초점의 좌표는

(2-3, 1), (-2-3, 1), 즉 (-1, 1), (-5, 1)

∴ $\overline{FF'} = -1 - (-5) = 4$

따라서 $\triangle OFF'$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$

052 $a > 0$ 이라 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{BF} + \overline{BF'} = 2a$$

$\triangle ABF'$ 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BF'} + \overline{AF'} &= \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{BF'} + \overline{AF'} \\ &= (\overline{AF} + \overline{AF'}) + (\overline{BF} + \overline{BF'}) \\ &= 2a + 2a = 4a \end{aligned}$$

이므로 $4a = 20$ 에서 $a = 5$ ㉔

$b^2 = 5^2 - 2^2 = 21$ 이므로 ㉕

$a^2 + b^2 = 25 + 21 = 46$ ㉖

채점 기준	배점 비율
㉔ 삼각형의 둘레의 길이를 이용하여 a 의 값 구하기	60%
㉕ 초점의 좌표를 이용하여 b^2 의 값 구하기	30%
㉖ $a^2 + b^2$ 의 값 구하기	10%

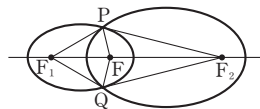
1등급 방법

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F'에 대하여

① $a > b > 0$ 일 때, $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$

② $b > a > 0$ 일 때, $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2b$

053 타원 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 합은 타원의 장축의 길이와 같으므로



$$\overline{PF_1} + \overline{PF} = 15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{QF_1} + \overline{QF} = 15 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\overline{PF} + \overline{PF_2} = 24 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\overline{QF} + \overline{QF_2} = 24 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

①-③을 하면

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 15 - 24 = -9 \quad \therefore |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 9$$

②-④을 하면

$$\overline{QF_1} - \overline{QF_2} = 15 - 24 = -9 \quad \therefore |\overline{QF_1} - \overline{QF_2}| = 9$$

$$\therefore |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| + |\overline{QF_1} - \overline{QF_2}| = 18$$

054 $\overline{PF} = a$, $\overline{PF'} = b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a + b = 2 \times 8 = 16$$

이때 $a > 0$, $b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a = b \text{일 때 성립})$$

$$16 \geq 2\sqrt{ab}, \sqrt{ab} \leq 8 \quad \therefore ab \leq 64$$

따라서 $\overline{PF} \times \overline{PF'}$ 의 최댓값은 64이다.

참고 산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0$, $b > 0$ 일 때,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a = b \text{일 때 성립})$$

055 $\overline{PF} = a$, $\overline{PF'} = b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 10 = 20 \text{이므로 } a + b = 20$$

타원 $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ 에서 $\sqrt{100-36} = 8$ 이므로

F(8, 0), F'(-8, 0)

$$\therefore \overline{FF'} = 2 \times 8 = 16$$

직각삼각형 PFF'에서 $\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = \overline{FF'}^2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 16^2 = 256$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \text{이므로}$$

$$256 = 20^2 - 2ab \quad \therefore ab = 72$$

따라서 직각삼각형 PF'QF의 넓이는

$$\overline{PF} \times \overline{PF'} = ab = 72$$

056 초점이 A(a, 0)이고 꼭짓점이 원점인 포물선의 준선의 방정식은 $x = -a$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축,

준선 $x = -a$ 에 내린 수선의 발을

각각 H, H'이라 하면

$$\overline{AH} = \overline{FH} = \frac{1}{2}\overline{AF} = 1$$

즉, 점 P의 x좌표는 $a+1$ 이므로 포

물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PA} = \overline{PH'} = (a+1) + a = 2a+1$$

$$\text{또, } \overline{PF'} = \overline{FF'} = 2\overline{OF} = 2(a+2) = 2a+4 \text{이고}$$

$\triangle PAF \sim \triangle F'FP$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{PA} : \overline{F'F} = \overline{AF} : \overline{FP}$$

$$(2a+1) : (2a+4) = 2 : (2a+1)$$

$$(2a+1)^2 = 2(2a+4), 4a^2 = 7$$

$$a^2 = \frac{7}{4} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{7}}{2} (\because a > 0)$$

즉, 타원의 장축의 길이는

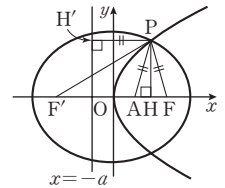
$$\overline{PF'} + \overline{PF} = (2a+4) + (2a+1) = 4a+5$$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{7}}{2} + 5$$

$$= 5 + 2\sqrt{7}$$

따라서 $p = 5$, $q = 2$ 이므로

$$p^2 + q^2 = 5^2 + 2^2 = 29$$



057 A(a, 0), B(0, b)로 놓으면

$$\overline{AB} = \sqrt{(-a)^2 + b^2} = 6 \quad \therefore a^2 + b^2 = 36 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{AB}$ 를 1:2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times a}{1+2}, \frac{1 \times b + 2 \times 0}{1+2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{2a}{3}, \frac{b}{3} \right)$$

$$\text{이므로 } x = \frac{2a}{3}, y = \frac{b}{3}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}x, b = 3y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$\left(\frac{3}{2}x \right)^2 + (3y)^2 = 36 \quad \therefore \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

058 점 P의 좌표가 (a, b) 이므로 점 H의 좌표는 $(a, 0)$

$\overline{PH}$ 를 2:3으로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times a + 3 \times a}{2+3}, \frac{2 \times 0 + 3 \times b}{2+3}\right), \text{ 즉 } \left(a, \frac{3}{5}b\right)$$

이므로 $x=a, y=\frac{3}{5}b$

$\therefore a=x, b=\frac{5}{3}y$ ㉠

이때 점 P가 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=9 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x^2+\left(\frac{5}{3}y\right)^2=9$$

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 방정식은

$$9x^2+25y^2=81 \text{ (단, } y \neq 0) \text{ (} \because b \neq 0 \text{)} \quad \text{..... ㉢}$$

따라서 $p=9, q=25$ 이므로

$$p+q=9+25=34 \quad \text{..... ㉣}$$

채점 기준	배점 비율
㉠ a, b 를 각각 x, y 에 대한 식으로 나타내기	40%
㉢ 점 Q가 나타내는 도형의 방정식 구하기	40%
㉣ $p+q$ 의 값 구하기	20%

059 $y=x+k$ 를 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 에 대입하면

$$\frac{x^2}{3}+\frac{(x+k)^2}{2}=1 \quad \therefore 5x^2+6kx+3k^2-6=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(3k)^2-5(3k^2-6) \geq 0, -6k^2+30 \geq 0$$

$$k^2-5 \leq 0, (k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5}) \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{5} \leq k \leq \sqrt{5}$$

따라서 정수 k 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

060 $y=m(x+2)$ 를 $x^2+\frac{y^2}{6}=1$ 에 대입하면

$$x^2+\frac{m^2(x+2)^2}{6}=1$$

$$\therefore (m^2+6)x^2+4m^2x+4m^2-6=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(2m^2)^2-(m^2+6)(4m^2-6) < 0, -18m^2+36 < 0$$

$$m^2-2 > 0, (m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2}) > 0$$

$$\therefore m < -\sqrt{2} \text{ 또는 } m > \sqrt{2}$$

061 직선 $x+2y-5=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 에 수직인 직선의 기울기는 2이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y=2x \pm \sqrt{2 \times 2^2+1} \quad \therefore y=2x \pm 3$$

062 타원 $4x^2+5y^2=20$, 즉 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y=x \pm \sqrt{5 \times 1^2+4} \quad \therefore y=x \pm 3 \quad \text{..... ㉠}$$

이때 M 의 값은 두 직선 $y=x+4$ 와 $y=x-3$ 사이의 거리와 같고, m 의 값은 두 직선 $y=x+4$ 와 $y=x+3$ 사이의 거리와 같다.

직선 $y=x+4$ 위의 점 $(0, 4)$ 와 직선 $y=x-3$, 즉 $x-y-3=0$ 사이의 거리는

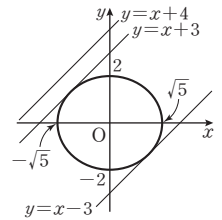
$$M=\frac{|-4-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

직선 $y=x+4$ 위의 점 $(0, 4)$ 와 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$m=\frac{|-4+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{..... ㉡}$$

$$\therefore M+m=\frac{7\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2} \quad \text{..... ㉢}$$

채점 기준	배점 비율
㉠ 접선의 방정식 구하기	40%
㉡ M, m 의 값 구하기	50%
㉢ $M+m$ 의 값 구하기	10%



063 $x-y=k$ (k 는 상수)라 하면 직선

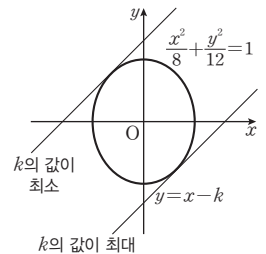
$$y=x-k \text{가 타원 } \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1$$

과 접하고 y 절편이 음수일 때 k 가 최댓값을 갖는다.

타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1$ 에 접하고 기울기가 1, y 절편이 음수인 직선의 방정식은

$$y=x-\sqrt{8 \times 1^2+12} \quad \therefore y=x-2\sqrt{5}$$

따라서 k 의 최댓값, 즉 $x-y$ 의 최댓값은 $2\sqrt{5}$ 이다.



064 점 $(1, a)$ 가 타원 $2x^2+y^2=6$ 위의 점이므로

$$2+a^2=6, a^2=4 \quad \therefore a=2 \text{ (} \because a > 0 \text{)}$$

타원 $2x^2+y^2=6$, 즉 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접

$$\text{선의 방정식은 } \frac{x}{3}+\frac{2y}{6}=1 \quad \therefore x+y=3$$

이 접선이 점 $(b, 5)$ 를 지나므로 $b+5=3 \quad \therefore b=-2$

$$\therefore a+b=2+(-2)=0$$

065 장축의 길이가 10, 단축의 길이가 6이므로 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 $H(a, 0)$

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{25}+\frac{by}{9}=1$$

위의 식에 $y=0$ 을 대입하면 $\frac{ax}{25}=1 \quad \therefore x=\frac{25}{a}$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{25}{a}, 0\right)$ 이므로

$$\overline{OH} \times \overline{OQ} = |a| \times \left|\frac{25}{a}\right| = 25$$

066 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 로 놓으면 점점에서의 점선의 방정식은 $4x_1x + 3y_1y = 12$

이 점선이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로 $12y_1 = 12 \quad \therefore y_1 = 1$

또, 점 (x_1, y_1) 은 타원 $4x^2 + 3y^2 = 12$ 위의 점이므로

$$4x_1^2 + 3y_1^2 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$y_1 = 1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$4x_1^2 + 3 = 12, \quad x_1^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore x_1 = \pm \frac{3}{2}$$

따라서 점선의 방정식은 $4 \times \left(\pm \frac{3}{2}\right)x + 3 \times 1 \times y = 12$

즉, $\pm 2x + y - 4 = 0$ 이므로 $a = \pm 2, b = -4$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4 + 16 = 20$$

067 점선의 기울기를 m 이라 하면 점선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{20m^2 + 4}$$

이 직선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$a = m \pm \sqrt{20m^2 + 4}$$

$$a - m = \pm \sqrt{20m^2 + 4}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$a^2 - 2am + m^2 = 20m^2 + 4$$

$$\therefore 19m^2 + 2am + 4 - a^2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 점선이 수직이므로 두 점선의 기울기의 곱은 -1 이다.

따라서 m 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{4 - a^2}{19} = -1, \quad 4 - a^2 = -19 \quad \therefore a^2 = 23$$

실력 완성 | 등급 문제

pp. 22~23

068 $2\sqrt{5}$	069 ②	070 11	071 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
072 ②	073 8	074 1000 m^2	075 $\frac{64}{5}$

068 타원의 초점과 장축, 단축

전략 직선 AF의 x 절편과 y 절편을 이용하여 타원의 방정식을 세운다.

풀이 점 F와 점 A는 각각 직선 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 이 x 축, y 축과

만나는 점이므로 $F(2, 0), A(0, -1)$

타원이 x 축의 양의 부분과 만나는 점의 좌표를 $(a, 0)$ 이라

하면 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$

타원의 한 초점이 $F(2, 0)$ 이므로

$$a^2 - 1 = 2^2, \quad a^2 = 5 \quad \therefore a = \sqrt{5} \quad (\because a > 0)$$

따라서 구하는 장축의 길이는 $2a = 2\sqrt{5}$

069 타원의 평행이동

전략 타원의 방정식을 $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ 꼴로 나타낸다.

풀이 $4x^2 - 24x + 16y^2 - 64y + 99 = 0$ 에서

$$4(x^2 - 6x + 9) + 16(y^2 - 4y + 4) = 1$$

$$\therefore \frac{(x-3)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y-2)^2}{\frac{1}{16}} = 1$$

따라서 주어진 타원은 타원

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{16}} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

∴ 타원 $\textcircled{1}$ 의 장축의 길이는 $2 \times \frac{1}{2} = 1$, 단축의 길이는

$2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 이고, 타원은 평행이동해도 장축, 단축의 길

이가 변하지 않으므로 주어진 타원의 장축의 길이는 단축의 길이의 2배이다.

∴ 타원 $\textcircled{1}$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$ 이므로 주어진 타원의 중심의 좌표는

$(0+3, 0+2)$, 즉 $(3, 2)$

∴ 주어진 타원의 두 초점 사이의 거리는 타원 $\textcircled{1}$ 의 두 초점 사이의 거리와 같다.

타원 $\textcircled{1}$ 의 초점의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$ 이므로

두 초점 사이의 거리는

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{4} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

070 타원의 정의의 활용

전략 $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 의 값이 최대가 되기 위한 $\overline{F'P}$ 의 조건을 찾는다.

풀이 타원의 정의에 의하여 $\overline{F'P} + \overline{PQ} + \overline{FQ} = 2 \times 7 = 14$

$$\therefore \overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{F'P}$$

즉, $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 가 최대가 되기 위해서는 $\overline{F'P}$ 가 최소가 되어야 한다. 이때 $\sqrt{49-33} = 4$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는

$F(4, 0), F'(-4, 0)$

원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 중심을

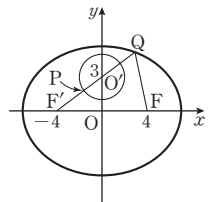
$O'(0, 3)$ 이라 하면 오른쪽 그림에서

$$\overline{F'P} \geq \overline{F'O'} - 2 = \sqrt{4^2 + 3^2} - 2 = 3$$

$$\therefore \overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{F'P}$$

$$\leq 14 - 3 = 11$$

따라서 $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 의 최댓값은 11이다.



071 점이 나타내는 도형의 방정식

전략 $\overline{FP}$ 의 길이는 두 원의 반지름의 길이의 합, $\overline{F'P}$ 의 길이는 두 원의 반지름의 길이의 차임을 이용한다.

풀이 중심이 점 P인 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\overline{FP}=r+1, \overline{F'P}=9-r \quad \therefore \overline{FP}+\overline{F'P}=10$$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 두 점 F, F'을 초점으로 하고 장축의 길이가 10인 타원이다.

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하면

$$2a=10 \quad \therefore a=5$$

$$b^2=5^2-3^2=16$$

따라서 구하는 도형의 방정식은

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

072 타원과 직선의 위치 관계

[전략] 원과 직선이 만나지 않기 위해서는 원과 직선 사이의 거리가 반지름보다 커야 함을 이용한다.

[풀이] $y=mx+2$ 를 $x^2+3y^2=3$ 에 대입하면

$$x^2+3(mx+2)^2=3$$

$$\therefore (3m^2+1)x^2+12mx+9=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(6m)^2-9(3m^2+1)>0, 9m^2-9>0$$

$$m^2>1 \quad \therefore m<-1 \text{ 또는 } m>1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$ 과 원 $x^2+y^2=\frac{1}{9}$ 이

만나지 않기 위해서는 직선과 원의 중심 (0, 0) 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\frac{1}{3}$ 보다 커야 하므로

$$\frac{|2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}>\frac{1}{3}, \sqrt{m^2+1}<6$$

$$m^2<35 \quad \therefore -\sqrt{35}<m<\sqrt{35} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $-\sqrt{35}<m<-1$ 또는 $1<m<\sqrt{35}$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 m 의 값의 합은

$$2+3+4+5=14$$

073 타원의 접선의 방정식; 기울기가 주어진 경우

[전략] 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 꼭짓점을 지나는 직선이 타원

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 접선인 것과 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 초점의 y 좌표가 a 임을 이용하여 a^2, b^2 에 대한 관계식을 구한다.

[풀이] 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 꼭짓점 $(-2, 0)$ 과 $(0, 4)$

를 지나는 직선의 방정식은

$$y=2x+4$$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y=2x \pm \sqrt{4a^2+b^2} \text{이므로 } \sqrt{4a^2+b^2}=4 \text{에서}$$

$$4a^2+b^2=16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 초점의 좌표가 $(0, a), (0, -a)$ 이므로

$$b^2-a^2=a^2 \text{에서 } b^2=2a^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a^2=\frac{8}{3}, b^2=\frac{16}{3}$$

$$\therefore a^2+b^2=\frac{8}{3}+\frac{16}{3}=8$$

074 타원의 정의의 활용

[1단계] 주어진 조건을 만족시키는 타원의 방정식을 세운다.

주어진 타원의 방정식을 $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하면

$$\text{장축의 길이가 } 50 \text{이므로 } 2a=50 \quad \therefore a=25$$

$$\text{단축의 길이가 } 40 \text{이므로 } 2b=40 \quad \therefore b=20$$

즉, 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

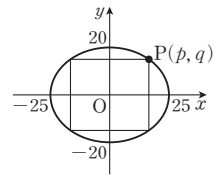
[2단계] 잔디밭 구장의 넓이의 최댓값을 구한다.

구하는 직사각형 모양의 잔디밭 구장의 넓이의 최댓값은 타원 ①에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값과 같다.

오른쪽 그림과 같이 타원 위의 점

중 제1사분면에 있는 점을

$P(p, q)$ ($p > 0, q > 0$)로 놓으면



$$\frac{p^2}{25^2} + \frac{q^2}{20^2} = 1$$

직사각형의 넓이는 $2p \times 2q = 4pq$

이때 $p^2 > 0, q^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{p^2}{25^2} + \frac{q^2}{20^2} \geq 2\sqrt{\frac{p^2}{25^2} \times \frac{q^2}{20^2}}$$

(단, 등호는 $\frac{p^2}{25^2} = \frac{q^2}{20^2}$ 일 때 성립)

$$\frac{pq}{250} \leq 1, pq \leq 250 \quad \therefore 4pq \leq 1000$$

따라서 잔디밭 구장의 넓이의 최댓값은 1000 m²이다.

075 타원의 접선의 방정식; 접점의 좌표가 주어진 경우

[1단계] 사각형 FHRF'에서 $\overline{FH}, \overline{F'R}$ 의 길이를 구한다.

$\sqrt{16-12}=2$ 이므로 타원의 초점의 좌표는

$$F(2, 0), F'(-2, 0)$$

또, 타원 위의 점 $P(2, 3)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$\frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1 \quad \therefore x+2y-8=0$$

$\overline{FH}, \overline{F'R}$ 는 두 점 $F(2, 0), F'(-2, 0)$ 과 직선 l 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{FH} = \frac{|2+0-8|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}, \overline{F'R} = \frac{|-2+0-8|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 2\sqrt{5}$$

[2단계] 사각형 FHRF'에서 $\overline{RH}$ 의 길이를 구한다.

이때 직선 l 의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 직선 l 과 수직인 직선

$F'R$ 의 기울기는 2이다.

$$\text{직선 } F'R \text{의 방정식은 } y=2x+4 \quad \therefore 2x-y+4=0$$

$\overline{RH}$ 는 점 $F(2, 0)$ 과 직선 $F'R$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{RH} = \frac{|4-0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

[3단계] 사각형 FHRF'의 넓이를 구한다.

따라서 사각형 FHRF'의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{6\sqrt{5}}{5} + 2\sqrt{5} \right) \times \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{64}{5}$$

13 쌍곡선

교과서에서 뽑은 기출 문제

p. 24

076 (1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ (2) $\frac{x^2}{3} - y^2 = -1$

077 (1) 초점의 좌표: $(3, 0), (-3, 0)$,
 꼭짓점의 좌표: $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$,
 주축의 길이: $2\sqrt{5}$, 점근선의 방정식: $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$

(2) 초점의 좌표: $(0, 2), (0, -2)$,
 꼭짓점의 좌표: $(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$, 주축의 길이: $2\sqrt{3}$,
 점근선의 방정식: $y = \pm \sqrt{3}x$

078 (1) $k < -\sqrt{3}$ 또는 $k > \sqrt{3}$ (2) $k = -\sqrt{3}$ 또는 $k = \sqrt{3}$
 (3) $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$

079 (1) $y = -2x \pm \sqrt{5}$ (2) $y = 2x - 4$

076 (1) 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면

$2a = 6$ 에서 $a = 3$

$b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$

$\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

(2) 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면

$2b = 2$ 에서 $b = 1$

$a^2 = 2^2 - 1^2 = 3$

$\therefore \frac{x^2}{3} - y^2 = -1$

077 (1) $4x^2 - 5y^2 = 20$ 에서 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\sqrt{5+4} = 3$ 이므로 초점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$

꼭짓점의 좌표는 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

주축의 길이는 $2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x$, 즉 $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$

(2) $x^2 - \frac{y^2}{3} = -1$ 에서

$\sqrt{1+3} = 2$ 이므로 초점의 좌표는 $(0, 2), (0, -2)$

꼭짓점의 좌표는 $(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$

주축의 길이는 $2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

점근선의 방정식은 $y = \pm \sqrt{3}x$

078 $y = x + k$ 를 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$3x^2 + 8kx + 4k^2 + 4 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (4k)^2 - 3 \times (4k^2 + 4) = 4k^2 - 12$

(1) $\frac{D}{4} > 0$, 즉 $4k^2 - 12 > 0$ 에서 $k^2 - 3 > 0$

$(k + \sqrt{3})(k - \sqrt{3}) > 0 \quad \therefore k < -\sqrt{3} \text{ 또는 } k > \sqrt{3}$

(2) $\frac{D}{4} = 0$, 즉 $4k^2 - 12 = 0$ 에서 $k^2 - 3 = 0$

$(k + \sqrt{3})(k - \sqrt{3}) = 0 \quad \therefore k = -\sqrt{3} \text{ 또는 } k = \sqrt{3}$

(3) $\frac{D}{4} < 0$, 즉 $4k^2 - 12 < 0$ 에서 $k^2 - 3 < 0$

$(k + \sqrt{3})(k - \sqrt{3}) < 0 \quad \therefore -\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$

079 (1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ 에 접하고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$y = -2x \pm \sqrt{2 \times (-2)^2 - 3} \quad \therefore y = -2x \pm \sqrt{5}$

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 $(3, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$\frac{3x}{6} - \frac{2y}{8} = 1$, 즉 $y = 2x - 4$

유형 분석 기출 문제

pp. 25~29

080 ②	081 ⑤	082 $\frac{x^2}{3} - y^2 = -1$	083 $\frac{1}{2}$
084 $(5, 2)$	085 ⑤	086 29	087 14
089 ⑤	090 96	091 ①	092 10
094 -22	095 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (단, $x \geq 4$)	096 2	093 ⑤
097 ④	098 24	099 3	100 $\sqrt{2}$
102 ②	103 $2\sqrt{17}$	104 6	105 ②
			106 ③

080 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{8} = 1$ 의 두 꼭짓점의 좌표는

$(a, 0), (-a, 0)$

이 두 점이 타원 $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점과 일치하므로

$15 - b^2 = a^2 \quad \therefore a^2 + b^2 = 15$

081 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{13} = 1$ 의 두 초점 F, F'의 좌표가 각각 $(7, 0),$

$(-7, 0)$ 이므로

$a^2 + 13 = 49, a^2 = 36$

$\therefore a = 6$ ($\because a > 0$)

따라서 쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a = 2 \times 6 = 12$

082 $16x^2 + 12y^2 = 192$ 에서 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$

$\sqrt{16-12} = 2$ 이므로 타원의 초점의 좌표는

$(0, 2), (0, -2)$

..... ㉑

구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면 주축의 길이가 2이므로

$2b = 2 \quad \therefore b = 1$

이때 $a^2 + b^2 = 2^2$ 이므로 $a^2 = 4 - 1 = 3$

..... ㉒

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{3} - y^2 = -1 \quad \dots\dots ㉔$$

채점 기준	배점 비율
㉔ 타원의 초점의 좌표 구하기	30%
㉕ 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 로 놓고 b, a^2 의 값 구하기	50%
㉖ 쌍곡선의 방정식 구하기	20%

083 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면

초점의 좌표가 $(3, 0), (-3, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 3^2 \quad \therefore b^2 = 9 - a^2 \quad \dots\dots ㉑$$

이때 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 $9 - a^2 > 0$ 에서

$$0 < a^2 < 9$$

이 쌍곡선이 점 $(-2, \sqrt{2})$ 를 지나므로

$$\frac{4}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑을 ㉒에 대입하면

$$\frac{4}{a^2} - \frac{2}{9 - a^2} = 1$$

$$4(9 - a^2) - 2a^2 = a^2(9 - a^2)$$

$$a^4 - 15a^2 + 36 = 0, (a^2 - 3)(a^2 - 12) = 0$$

$$\therefore a^2 = 3 \quad (\because 0 < a^2 < 9)$$

$$a^2 = 3 \text{을 } ㉑ \text{에 대입하면 } b^2 = 9 - 3 = 6$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 이므로

$$p = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{6}$$

$$\therefore p + q = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

1등급 비법

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)에서

① 초점의 좌표가 $(c, 0), (-c, 0)$ 이다. $\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

② 점 (p, q) 를 지난다. $\Rightarrow \frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} = 1$

084 쌍곡선 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{20+16}=6$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는

$$(6, 0), (-6, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 12$$

점 P의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b > 0$)라 하면 사각형 F'QFP의 넓이가 24이므로

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{FF'} \times b \right) = 24 \quad \therefore b = 2$$

또, 점 P는 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{20} - \frac{4}{16} = 1, a^2 = 25 \quad \therefore a = 5 \quad (\because a > 0)$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(5, 2)$ 이다.

085 $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$ 에서

$$9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 = 144$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2

만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore a = 2, b = -1$$

또, $\sqrt{16+9}=5$ 이므로 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 초점의 좌표는

$$(5, 0), (-5, 0)$$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(5+2, 0-1), (-5+2, 0-1)$$

$$\text{즉, } (7, -1), (-3, -1) \quad \therefore c = -1$$

$$\therefore abc = 2 \times (-1) \times (-1) = 2$$

086 $\overline{FF'}$ 의 중점을 M이라 하면

$$M(4, -1) \quad \therefore \overline{FM} = 4$$

또, 두 초점의 y 좌표가 같으므로 초점이 F, F'이고 두 초점

에서의 거리의 차이가 6인 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 을 x 축

의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같다.

즉, 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-4)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{7} = 1$$

$$\therefore 7x^2 - 9y^2 - 56x - 18y + 40 = 0$$

따라서 $a = 7, b = -18, c = 40$ 이므로

$$a + b + c = 7 + (-18) + 40 = 29$$

087 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 의 한 초점의 좌표가 $(0, 10)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 10^2 \quad \dots\dots ㉑$$

쌍곡선의 한 점근선의 기울기가 $\frac{3}{4}$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad \therefore b = \frac{3}{4}a \quad \dots\dots ㉒ \quad \dots\dots ㉓$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$a = 8, b = 6 \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore a + b = 8 + 6 = 14 \quad \dots\dots ㉔$$

채점 기준	배점 비율
㉓ a, b 사이의 관계식 구하기	60%
㉔ $a+b$ 의 값 구하기	40%

088 주축이 x 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{이라 하면}$$

쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore b = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \dots\dots ㉑$$

쌍곡선의 주축의 길이가 8이므로

$$2a=8 \quad \therefore a=4$$

$$a=4\text{를 } \textcircled{1}\text{에 대입하면 } b=2\sqrt{3}$$

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1 \text{에서}$$

$$\sqrt{16+12}=2\sqrt{7}\text{이므로 두 초점의 좌표는}$$

$$(2\sqrt{7}, 0), (-2\sqrt{7}, 0)$$

따라서 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는

$$2 \times 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

089 $3x^2 - 2y^2 = 6$ 에서 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$

$$\sqrt{2+3} = \sqrt{5}\text{이므로 쌍곡선의 두 초점의 좌표는}$$

$$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$$

$$\text{점근선의 방정식은 } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x \quad \therefore y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$\text{중심이 } (\sqrt{5}, 0)\text{이고 직선 } y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}x, \text{ 즉 } \pm\sqrt{6}x - 2y = 0$$

에 접하는 원의 반지름의 길이는 원의 중심 $(\sqrt{5}, 0)$ 과 직선

$$\pm\sqrt{6}x - 2y = 0 \text{ 사이의 거리와 같으므로}$$

$$\frac{|\sqrt{30}-0|}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{10}} = \sqrt{3}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

090 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{16+9}=5$ 이므로

$$F(5, 0), F'(-5, 0) \quad \therefore \overline{FF'} = 10$$

$\triangle PFF'$ 의 둘레의 길이가 22이므로

$$\overline{PF'} + \overline{PF} + \overline{FF'} = 22\text{에서}$$

$$\overline{PF'} + \overline{PF} + 10 = 22 \quad \therefore \overline{PF'} + \overline{PF} = 12$$

쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2 \times \sqrt{16} = 8$

$$\begin{aligned} \therefore |\overline{PF}^2 - \overline{PF'}^2| &= |(\overline{PF} + \overline{PF'}) (\overline{PF} - \overline{PF'})| \\ &= |\overline{PF} + \overline{PF'}| |\overline{PF} - \overline{PF'}| \\ &= 12 \times 8 = 96 \end{aligned}$$

091 $7x^2 - 9y^2 = 63$ 에서 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

$$\sqrt{9+7}=4\text{이므로 쌍곡선의 두 초점의 좌표는}$$

$$(4, 0), (-4, 0)$$

따라서 점 A는 쌍곡선의 한

초점이므로 다른 한 초점을 A'

이라 하면 쌍곡선의 정의에 의

하여

$$\overline{PA'} - \overline{PA} = 2 \times 3 = 6$$

$$\overline{PA} = \overline{PA'} - 6\text{이므로}$$

$$\overline{PA} + \overline{PB} = (\overline{PA'} - 6) + \overline{PB}$$

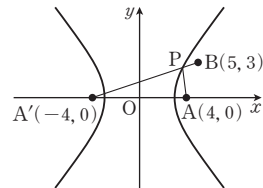
$$\geq \overline{A'B} - 6 = \sqrt{(5+4)^2 + 3^2} - 6$$

$$= -6 + 3\sqrt{10}$$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $-6 + 3\sqrt{10}$ 이므로

$$a = -6, b = 3$$

$$\therefore a - b = -6 - 3 = -9$$



092 쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a$ ㉠

$$\overline{PF} : \overline{PF'} = 2 : 1 \text{에서 } \overline{PF} = 2\overline{PF'}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}\text{에서 } \overline{PF'} = 2a (\because a > 0)$$

$$\therefore \overline{PF} = 4a$$

$\overline{FF'} = 10$ 이고 $\triangle PFF'$ 은 직각삼각형이므로

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = \overline{FF'}^2 \text{에서}$$

$$16a^2 + 4a^2 = 100, a^2 = 5$$

$$\therefore a = \sqrt{5} (\because a > 0)$$

$$\text{또, } \overline{FF'} = 2\sqrt{a^2 + b^2} \text{에서}$$

$$10 = 2\sqrt{5 + b^2}, 5 + b^2 = 25$$

$$b^2 = 20 \quad \therefore b = 2\sqrt{5} (\because b > 0)$$

$$\therefore ab = \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 10$$

채점 기준	배점 비율
㉠ a의 값 구하기	50%
㉡ b의 값 구하기	30%
㉢ ab의 값 구하기	20%

093 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 에서 $\sqrt{1+3}=2$ 이므로 초점의 좌표는

$$F(2, 0), F'(-2, 0) \quad \therefore \overline{FF'} = 4$$

조건 ㉠에서 $\overline{PF'} > \overline{PF}$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2$$

이때 조건 ㉡에서 $\triangle PFF'$ 가 이등변삼각형이므로

$$\overline{PF'} = \overline{FF'} \text{ 또는 } \overline{PF} = \overline{FF'}$$

(i) $\overline{PF'} = \overline{FF'}$ 인 경우

㉠에서

$$\overline{PF} = \overline{PF'} - 2 = \overline{FF'} - 2 = 4 - 2 = 2$$

따라서 $\triangle PFF'$ 의 꼭짓점 F'에서

$\overline{PF}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 $HF'F$ 에서

$$\overline{F'H} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

$$\therefore a = \triangle PFF' = \frac{1}{2} \times \overline{PF} \times \overline{F'H}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{15} = \sqrt{15}$$

(ii) $\overline{PF} = \overline{FF'}$ 인 경우

㉠에서

$$\overline{PF'} = \overline{PF} + 2 = \overline{FF'} + 2 = 4 + 2 = 6$$

따라서 $\triangle PFF'$ 의 꼭짓점 F에서

$\overline{PF'}$ 에 내린 수선의 발을 I라 하면

직각삼각형 $IF'F$ 에서

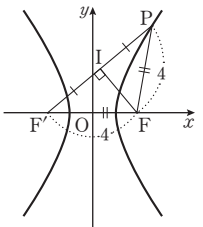
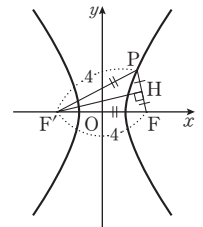
$$\overline{FI} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore a = \triangle PFF' = \frac{1}{2} \times \overline{PF'} \times \overline{FI}$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 곱은

$$\sqrt{15} \times 3\sqrt{7} = 3\sqrt{105}$$



094 $\sqrt{(x-8)^2+y^2} : |x-5| = 2 : 1$ 이므로

$$2|x-5| = \sqrt{(x-8)^2+y^2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$4(x-5)^2 = (x-8)^2 + y^2$$

$$4x^2 - 40x + 100 = x^2 - 16x + 64 + y^2$$

$$\therefore 3x^2 - y^2 - 24x + 36 = 0$$

따라서 $a=3, b=-1, c=-24$ 이므로

$$a+b+c=3+(-1)+(-24)=-22$$

1등급 방법

- ① 두 점에서의 거리의 차이가 일정한 점이 나타내는 도형은 쌍곡선이다.
- ② 한 점과 직선에 이르는 거리의 비가 $m:n$ ($m>n$)인 점이 나타내는 도형은 쌍곡선이다.

095 원 $(x+5)^2+y^2=64$ 의 중심을 A, 점 $(5, 0)$ 을 B라 하면

$$A(-5, 0), B(5, 0)$$

중심이 P인 원의 반지름의 길이는 $\overline{PB}$ 의 길이와 같으므로 오른쪽 그림에서

$$\overline{PA} - \overline{PB} = \sqrt{64} = 8$$

$$\text{이때 } \overline{PA} = \sqrt{(x+5)^2+y^2},$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x-5)^2+y^2} \text{이므로}$$

$$\sqrt{(x+5)^2+y^2} - \sqrt{(x-5)^2+y^2} = 8$$

$$\sqrt{(x+5)^2+y^2} = 8 + \sqrt{(x-5)^2+y^2}$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

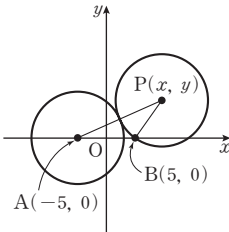
$$5x - 16 = 4\sqrt{(x-5)^2+y^2}$$

$5x - 16 \geq 0$ 이고 위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad (\text{단, } x \geq \frac{16}{5})$$

이때 점 P는 원 $(x+5)^2+y^2=64$ 위의 점 $(3, 0)$ 과 점 B를 연결하는 선분의 중점 $(4, 0)$ 을 지나므로 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad (\text{단, } x \geq 4)$$



096 직선 $y=2x$ 를 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y=2x+k$$

이것을 $2x^2-y^2=4$ 에 대입하면

$$2x^2 - (2x+k)^2 = 4$$

$$\therefore 2x^2 + 4kx + k^2 + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 2 \times (k^2 + 4) \geq 0$$

$$k^2 - 4 \geq 0, (k+2)(k-2) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -2 \text{ 또는 } k \geq 2$$

따라서 양수 k 의 최솟값은 2이다.

097 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 과 쌍곡선

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{64} = -1 \text{의 점근선의 방}$$

정식은 각각

$$y = \pm x, y = \pm 4x$$

오른쪽 그림과 같이 직선

$y=mx$ 가 두 쌍곡선 중 어느 것

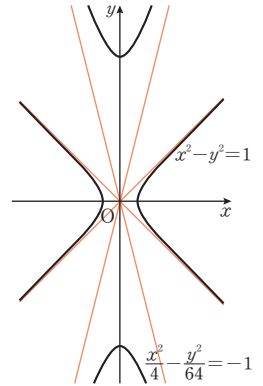
과도 만나지 않으려면

$$-4 \leq m \leq -1 \text{ 또는 } 1 \leq m \leq 4$$

이어야 한다.

따라서 구하는 정수 m 은 $-4,$

$-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$ 의 8개이다.



098 $y=kx+1$ 을 $4x^2-y^2=1$ 에 대입하면

$$4x^2 - (kx+1)^2 = 1$$

$$\therefore (4-k^2)x^2 - 2kx - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(i) $4-k^2=0$, 즉 $k=\pm 2$ 일 때, 방정식 $\textcircled{1}$ 은 오직 한 개의 해를 갖는다.

(ii) $4-k^2 \neq 0$ 일 때, 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - (4-k^2) \times (-2) = 0$$

$$k^2 - 8 = 0, k^2 = 8 \quad \therefore k = \pm 2\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 k 의 값의 제곱의 합은

$$(-2)^2 + 2^2 + (-2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 24 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

채점 기준	배점 비율
㉓ 직선의 방정식을 쌍곡선의 방정식에 대입하여 정리하기	30%
㉔ k 의 값 구하기	50%
㉕ k 의 값의 제곱의 합 구하기	20%

099 쌍곡선 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{2} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{a \times 3^2 - 2} \quad \therefore y = 3x \pm \sqrt{9a - 2}$$

즉, 직선 $y = 3x + \sqrt{9a - 2}$ 가 직선 $y = 3x + 5$ 와 일치하므로

$$\sqrt{9a - 2} = 5, 9a - 2 = 25 \quad \therefore a = 3$$

100 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{13} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{2 \times 3^2 - 13} \quad \therefore y = 3x \pm \sqrt{5}$$

구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $y = 3x - \sqrt{5}$ 위의 점

$(0, -\sqrt{5})$ 와 직선 $y = 3x + \sqrt{5}$, 즉 $3x - y + \sqrt{5} = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|\sqrt{5} + \sqrt{5}|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

101 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - y^2 = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{5} - by = 1$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{a}{5} = 1 \quad \therefore a = 5$$

$$\begin{aligned} \text{이때 } \frac{a^2}{5} - by = 1 \text{ 이므로 } \frac{25}{5} - b^2 = 1 \\ b^2 = 4 \quad \therefore b = 2 \quad (\because b > 0) \\ \therefore a + b = 5 + 2 = 7 \end{aligned}$$

- 102** 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$ 위의 점 A(4, 1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{8} - y = 1 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - 1$$

이 직선의 x절편은 2이므로 점 B의 좌표는 (2, 0)

또, 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{8+1}=3$ 이므로 초점 F의 좌표는 (3, 0)

따라서 $\triangle FAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

- 103** 쌍곡선 $4x^2 - y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 (2, 2)에서의

접선의 방정식은

$$\frac{2x}{3} - \frac{2y}{12} = 1 \quad \therefore y = 4x - 6 \quad \dots\dots ㉑$$

또, 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}x \quad \therefore y = \pm 2x \quad \dots\dots ㉒$$

$y = 4x - 6$ 과 $y = 2x$ 를 연립하여 풀면

$$x = 3, y = 6$$

$y = 4x - 6$ 과 $y = -2x$ 를 연립하여 풀면 $x = 1, y = -2$

$$\therefore A(1, -2), B(3, 6) \quad \dots\dots ㉓$$

$$\therefore AB = \sqrt{(3-1)^2 + \{6-(-2)\}^2} = 2\sqrt{17} \quad \dots\dots ㉔$$

채점 기준	배점 비율
㉑ 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식 구하기	30%
㉒ 쌍곡선의 점근선의 방정식 구하기	30%
㉓ 두 점 A, B의 좌표 구하기	20%
㉔ 두 점 A, B 사이의 거리 구하기	20%

- 104** 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 로 놓으면 점점에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{3} - \frac{y_1 y}{2} = 1$$

이 접선이 점 (0, -2)를 지나므로

$$y_1 = 1$$

또, 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{3} - \frac{y_1^2}{2} = 1 \quad \dots\dots ㉕$$

$y_1 = 1$ 을 ㉕에 대입하면

$$\frac{x_1^2}{3} - \frac{1}{2} = 1, x_1^2 = \frac{9}{2}$$

$$\therefore x_1 = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 점점의 방정식은

$$\pm \frac{3\sqrt{2}}{2}x - \frac{1 \times y}{2} = 1, \text{ 즉 } y = \pm \sqrt{2}x - 2$$

$$\text{이므로 } m = \pm \sqrt{2}, n = -2$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 2 + 4 = 6$$

- 105** 쌍곡선 $x^2 - 3y^2 - 3 = 0$, 즉 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가

m 인 직선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{3m^2 - 1}$$

이 직선이 점 (3, 2)를 지나므로 $2 = 3m \pm \sqrt{3m^2 - 1}$

$$2 - 3m = \pm \sqrt{3m^2 - 1}$$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$6m^2 - 12m + 5 = 0$$

이 이차방정식의 두 실근이 점점의 기울기 m_1, m_2 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m_1 + m_2 = -\frac{-12}{6} = 2$$

참고 이차방정식 $6m^2 - 12m + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-6)^2 - 6 \times 5 = 6 > 0 \text{ 이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.}$$

- 106** 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 로 놓으면 점점에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{4} - y_1 y = 1$$

이 접선이 점 A(0, 1)을 지나므로 $-y_1 = 1 \quad \therefore y_1 = -1$

또, 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1 \quad \dots\dots ㉖$$

$y_1 = -1$ 을 ㉖에 대입하면

$$\frac{x_1^2}{4} - 1 = 1, x_1^2 = 8 \quad \therefore x_1 = \pm 2\sqrt{2}$$

따라서 P($-2\sqrt{2}, -1$), Q($2\sqrt{2}, -1$)이라 하면

$\triangle APQ$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$$

실력 완성 1등급 문제

pp. 30~31

107 ④	108 ④	109 116	110 ②	111 $\sqrt{2}$
112 ③	113 $2\sqrt{2}$	114 $2\sqrt{2}$ 분	115 -2	

- 107** 쌍곡선의 방정식

전략 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)의 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 $2b$ 임을 이용한다.

[풀이] 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 두 초점이 x 축 위에 있고,

장축의 길이가 10이므로

$$2a = 10 \quad \therefore a = 5$$

단축의 길이가 $4\sqrt{3}$ 이므로

$$2b = 4\sqrt{3} \quad \therefore b = 2\sqrt{3}$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} - \frac{y^2}{5^2} = -1$ 의 주축의 길이는

$$2 \times 5 = 10$$

108 쌍곡선의 평행이동 + 쌍곡선의 점근선

[전략] 주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ 꼴로 나타낸다.

[풀이] 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$(x-2)^2 - \frac{(y+1)^2}{3} = 1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 중심의 좌표는 (0, 0)이므로 주어진 쌍곡선의 중심의 좌표는

$$(0+2, 0-1), \text{ 즉 } (2, -1)$$

ㄴ. 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 주축의 길이는 $2 \times 1 = 2$

쌍곡선은 평행이동해도 주축의 길이가 변하지 않으므로 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 2이다.

ㄷ. 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 에서 $\sqrt{1+3} = 2$ 이므로 초점의 좌표는

$$(-2, 0), (2, 0)$$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(-2+2, 0-1), (2+2, 0-1), \text{ 즉 } (0, -1), (4, -1)$$

ㄹ. 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm\sqrt{3}x$ 이므로

로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y+1 = \pm\sqrt{3}(x-2)$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - 1 \text{ 또는 } y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 1$$

쌍곡선의 초점에서 두 점근선까지의 거리는 모두 같으므로

로 점 (0, -1)과 직선 $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - 1$, 즉

$$\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} - 1 = 0 \text{ 사이의 거리를 구하면}$$

$$\frac{|0+1-2\sqrt{3}-1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}} = \sqrt{3}$$

따라서 초점과 점근선 사이의 거리는 $\sqrt{3}$ 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

109 쌍곡선의 정의의 활용

[전략] 쌍곡선의 정의를 이용하고, 점 F에서 원 C에 또 다른 접선을 그은 후 원의 접선의 성질을 이용한다.

[풀이] 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{17} = 1$ 에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|FP - F'P| = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \quad \dots\dots ㉠$$

오른쪽 그림과 같이 원 C와 직선

FP의 접점을 R라 하고, 점 F에

서 원 C에 그은 또 다른 접선의

접점을 S라 하면

$$PQ = PR, FR = FS$$

이때 $FS = F'Q = 5\sqrt{2}$ 이므로

$$FP + F'P = FR + PR + F'P$$

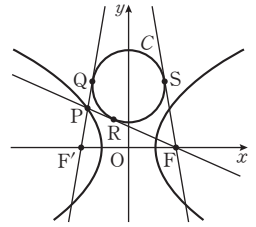
$$= FS + PQ + F'P$$

$$= FS + F'Q$$

$$= 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $FP = 7\sqrt{2}, F'P = 3\sqrt{2}$

$$\therefore FP^2 + F'P^2 = (7\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 116$$



+ 개념 보충

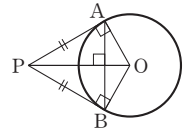
원의 접선의 성질

오른쪽 그림과 같이 원 O 밖의 한 점 P에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B

라 할 때,

$$(1) PA = PB, PO \perp AB$$

$$(2) PA \perp OA, PB \perp OB$$



110 점이 나타내는 도형의 방정식

[전략] 조건 ㉠을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 정하고, 조건 ㉡를 이용하여 관계식을 세운다.

[풀이] 두 점 P, Q의 좌표를

$$P(a, 2a), Q(-b, 2b) \quad (ab > 0)$$

로 놓고 점 Q에서 직선 $y = 2x$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 QH 의 길이는 점 Q와 직선 $y = 2x$, 즉 $2x - y = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \times OP \times QH = \frac{1}{2} \times \sqrt{a^2 + (2a)^2} \times \frac{|-2b - 2b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{5} |a| \times \frac{4|b|}{\sqrt{5}} = 2|ab| = 12$$

$$\therefore ab = 6 \quad (\because ab > 0) \quad \dots\dots ㉠$$

또, 선분 PQ의 중점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{a-b}{2}, y = \frac{2a+2b}{2}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = \frac{2x+y}{2}, b = \frac{-2x+y}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{2x+y}{2} \times \frac{-2x+y}{2} = 6 \quad \therefore \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{24} = -1$$

111 쌍곡선의 접선의 방정식; 기울기가 주어진 경우 + 쌍곡선의 점근선

[전략] 쌍곡선의 기울기가 주어진 접선의 방정식을 이용하여 상수 a의 값을 구한다.

[풀이] 쌍곡선 $2x^2 - ay^2 = 2a$, 즉 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{2} = 1$ 에 접하고 기

울기가 a인 직선의 방정식은

$$y = ax \pm \sqrt{a \times a^2 - 2} \quad \therefore y = ax \pm \sqrt{a^3 - 2}$$

즉, 직선 $y=ax \pm \sqrt{a^3-2}$ 가 직선 $y=ax+5$ 와 일치하므로 $\sqrt{a^3-2}=5$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$a^3-2=25, a^3-27=0, (a-3)(a^2+3a+9)=0$$

$$\therefore a=3 (\because a>0)$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ 에서 $\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$ 이므로 두 초점

의 좌표는

$$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$$

이고, 점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x \quad \therefore y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$$

쌍곡선의 초점에서 두 점근선까지의 거리는 모두 같으므로

점 $(\sqrt{5}, 0)$ 과 직선 $y=\frac{\sqrt{6}}{3}x$, 즉 $\sqrt{6}x-3y=0$ 사이의 거리

를 구하면

$$\frac{|\sqrt{6} \times \sqrt{5} - 3 \times 0|}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-3)^2}} = \sqrt{2}$$

112 쌍곡선의 접선의 방정식; 기울기가 주어진 경우

전략 $\triangle PQR$ 의 넓이가 최소일 때는 점 R과 직선 PQ 사이의 거리가 최소일 때임을 이용한다.

풀이 두 점 $P(0, -1), Q(3, 2)$ 에 대하여

$$PQ = \sqrt{(3-0)^2 + \{2-(-1)\}^2} = 3\sqrt{2}$$

선분 PQ의 길이가 일정하므로 $\triangle PQR$ 의 넓이는 점 R과 직선 PQ 사이의 거리가 최소일 때, 즉 점 R가 직선 PQ와 평행하고 직선 PQ에 가까운 접선 위의 점일 때 최소이다.

직선 PQ의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{2-(-1)}{3-0}x \quad \therefore y=x-1$$

쌍곡선 $3x^2-7y^2-21=0$, 즉 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y=x \pm \sqrt{7 \times 1^2 - 3} \quad \therefore y=x+2 \text{ 또는 } y=x-2$$

이때 오른쪽 그림과 같이 점 R

는 직선 $y=x-2$ 위의 점이다.

점 R과 직선 PQ 사이의 거리는 점 $(0, -2)$ 와 직선

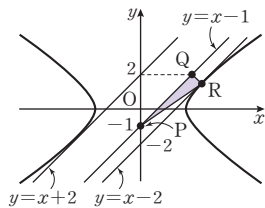
$y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사

이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0+2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $\triangle PQR$ 의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}$$



113 쌍곡선의 접선의 방정식; 쌍곡선 밖의 한 점이 주어진 경우

전략 점 P에서 쌍곡선에 그은 한 접선의 기울기가 m 이면 수직인 다른 접선의 기울기는 $-\frac{1}{m}$ 임을 이용한다.

풀이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{a^2}=1$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의

방정식은

$$y=mx \pm \sqrt{9m^2-a^2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{a^2}=1$ 에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{m}$ 인 직선의

방정식은

$$y=-\frac{1}{m}x \pm \sqrt{9 \times \frac{1}{m^2} - a^2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $y-mx=\pm\sqrt{9m^2-a^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$m^2x^2-2mxy+y^2=9m^2-a^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡에서 $y+\frac{1}{m}x=\pm\sqrt{9 \times \frac{1}{m^2} - a^2}$

위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2+2mxy+m^2y^2=9-a^2m^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

㉢+㉣을 하면

$$x^2(m^2+1)+y^2(m^2+1)=9(m^2+1)-a^2(m^2+1)$$

$$(x^2+y^2)(m^2+1)=(9-a^2)(m^2+1)$$

$$\therefore x^2+y^2=9-a^2 \quad (\text{단, } 0 < a < 3)$$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt{9-a^2}$ 인 원이다.

오른쪽 그림에서 원점과 점

$(4, 3)$ 사이의 거리는 5이고 점

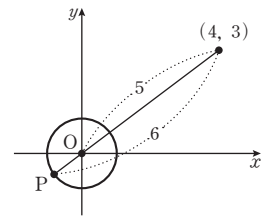
P와 점 $(4, 3)$ 사이의 거리의

최댓값이 6이므로

$$5+\sqrt{9-a^2}=6$$

$$a^2=8$$

$$\therefore a=2\sqrt{2} (\because 0 < a < 3)$$



114 쌍곡선의 정의의 활용

전략 좌표평면 위에 주어진 조건을 그래프로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 의 중

점이 원점에 오도록 좌표평면 위에 놓

으면 $A(-10, 0), B(10, 0)$

$$|\overline{PB}-\overline{PA}|=|\overline{QB}-\overline{QA}|=16$$

이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 두 점

P, Q는 두 점 A, B를 초점으로 하는 쌍곡선 위의 점이다.

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$)이라 하면

$$2a=16 \quad \therefore a=8$$

$$b^2=10^2-8^2=36$$

따라서 쌍곡선의 방정식은

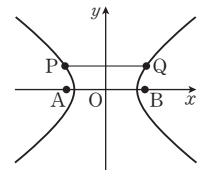
$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$$

한편, 해안선과 Q 지점 사이의 거리가 6 km이므로 점 Q의

좌표를 $(k, 6)$ ($k>0$)이라 하면

$$\frac{k^2}{64}-\frac{6^2}{36}=1, k^2=128$$

$$\therefore k=8\sqrt{2} (\because k>0)$$



$\overline{PQ}=2k=2 \times 8\sqrt{2}=16\sqrt{2}$ 이므로 두 지점 P, Q 사이의 거리는 $16\sqrt{2}$ km이다.

따라서 배가 P 지점과 Q 지점 사이를 통과하는 데 걸리는 시간은 $\frac{16\sqrt{2}}{8}=2\sqrt{2}$ (분)

115 쌍곡선의 접선의 방정식; 접점의 좌표가 주어진 경우

전략 원 위의 점 (a, b) 에서의 접선과 수직이고 점 (a, b) 를 지나는 직선은 이 원의 중심을 지남을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) ($x_1 < 0$)이라 하면 점

$P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$5x_1x - 2y_1y + 10 = 0$$

$$\therefore y = \frac{5x_1}{2y_1}x + \frac{5}{y_1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 $P(x_1, y_1)$ 을 지나고 직선 $\textcircled{7}$ 에 수직인 직선의 방정식은

$$y - y_1 = -\frac{2y_1}{5x_1}(x - x_1)$$

$$\therefore y = -\frac{2y_1}{5x_1}x + \frac{7}{5}y_1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

직선 $\textcircled{8}$ 은 원의 중심 $(0, 7)$ 을 지나므로

$$7 = \frac{7}{5}y_1 \quad \therefore y_1 = 5$$

또, 점 $P(x_1, 5)$ 는 쌍곡선 $5x^2 - 2y^2 + 10 = 0$ 위의 점이므로

$$5x_1^2 - 50 + 10 = 0, 5x_1^2 = 40$$

$$x_1^2 = 8$$

$$\therefore x_1 = -2\sqrt{2} \quad (\because x_1 < 0)$$

이때 점 $P(-2\sqrt{2}, 5)$ 에서의 접선의 방정식은 $\textcircled{7}$ 에서

$$y = -\sqrt{2}x + 1 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

점 Q에서의 접선은 직선 $\textcircled{9}$ 과 y축에 대하여 대칭이므로

$$y = \sqrt{2}x + 1$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$(-\sqrt{2}) \times \sqrt{2} = -2$$

$\triangle PAB$ 가 정삼각형이므로

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{AB}$$

$A(a, b)$ ($a > 1, b > 0$)라 하면

$B(a, -b)$ 이다.

이때

$$\overline{PA} = \sqrt{(a-1)^2 + b^2}, \overline{AB} = 2b$$

이고, $\overline{PA} = \overline{AB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + b^2 = 4b^2$$

$$\therefore (a-1)^2 = 3b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 점 $A(a, b)$ 가 포물선 $y^2 = 4(x-1)$ 위의 점이므로

$$b^2 = 4(a-1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$(a-1)^2 = 3 \times 4(a-1)$$

$$(a-1)(a-13) = 0$$

$$\therefore a = 13 \quad (\because a > 1)$$

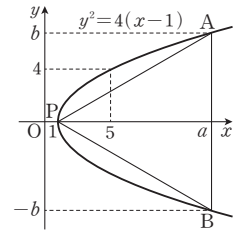
$a = 13$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$b^2 = 4 \times 12 = 48$$

$$\therefore b = 4\sqrt{3} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore \triangle PAB = \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{AB}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (8\sqrt{3})^2 = 48\sqrt{3}$$

참고 포물선의 축이 x축이므로 $y^2 = 4px$ 꼴이고, 꼭짓점이 $(1, 0)$ 이므로 포물선 $y^2 = 4px$ 를 x축의 방향으로 1만큼 평행 이동한 것이다.



개념 보충

한 변의 길이가 a인 정삼각형에서

$$(\text{높이}) = \frac{\sqrt{3}}{2}a, (\text{넓이}) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

117 포물선의 정의의 활용

전략 포물선의 정의를 이용하여 $\overline{PH}$ 의 길이를 구한 후, 초점 F에서 직선 PH에 수선의 발을 내려 직각삼각형을 만든다.

풀이 포물선 $x^2 = -8y = 4 \times (-2)y$ 의 초점이 $F(0, -2)$, 준선이 $y = 2$ 이므로

$\overline{PF} = k$ ($k > 0$)라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = k - 2$$

$$\overline{PF} : \overline{PH} = 5 : 4 \text{이므로}$$

$$k : (k-2) = 5 : 4$$

$$5k - 10 = 4k$$

$$\therefore k = 10$$

$$\therefore \overline{PF} = 10, \overline{PH} = 8$$

오른쪽 그림과 같이 초점 F에서

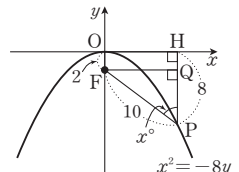
$\overline{PH}$ 에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$$\overline{PQ} = 8 - 2 = 6$$

이므로 직각삼각형 FPQ에서

$$\overline{FQ} = \sqrt{\overline{PF}^2 - \overline{PQ}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$\therefore \sin x^\circ = \frac{\overline{FQ}}{\overline{PF}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$



실전 대비 마무리 문제

pp. 32~33

- | | | | |
|---------------------------|-------|---------|--------|
| 116 ⑤ | 117 ④ | 118 90° | 119 ③ |
| 120 $\sqrt{3} < k \leq 2$ | 121 6 | 122 ⑤ | 123 31 |
| 124 52 | | | |

116 포물선의 방정식

전략 포물선의 방정식을 구한 후, 정삼각형의 세 변의 길이가 같음을 이용한다.

풀이 포물선의 방정식을 $y^2 = 4p(x-1)$ 이라 하면

이 포물선이 점 $(5, 4)$ 를 지나므로

$$4^2 = 4p(5-1)$$

$$\therefore p = 1$$

따라서 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4(x-1)$$

118 포물선의 접선의 방정식; 포물선 밖의 한 점이 주어진 경우

전략 포물선에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식을 구하고, 이 직선이 포물선의 준선과 한 점에서 만남을 이용한다.

풀이 포물선 $y^2=16x=4 \times 4x$ 의 준선의 방정식은 $x=-4$ 이므로 준선 위의 임의의 한 점의 좌표를 $(-4, a)$ 라 하면 포물선 $y^2=16x$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y=mx+\frac{4}{m}$$

이 접선이 점 $(-4, a)$ 를 지나므로

$$a=-4m+\frac{4}{m}$$

$$\therefore 4m^2+am-4=0$$

이 이차방정식의 두 실근이 접선의 기울기이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 곱은 a 의 값에 관계없이 $-\frac{4}{4}=-1$ 이므로 두 접선의 기울기의 곱은 항상 -1 이다.

따라서 점 $(-4, a)$ 에서 포물선 $y^2=16x$ 에 그은 두 접선은 항상 서로 수직이므로 두 접선이 이루는 각의 크기는 90° 이다.

119 타원의 정의의 활용

전략 $\overline{A_iF'}=\overline{A_jF}$ 를 만족시키는 i, j 의 값을 찾고 타원의 정의를 이용한다.

풀이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 의 장축의 길이는 $2 \times 5=10$

두 점 F, F' 이 타원의 두 초점이므로

$$\overline{A_1F'}=\overline{A_6F}, \overline{A_2F'}=\overline{A_5F}, \overline{A_3F'}=\overline{A_4F}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{A_1F'}+\overline{A_2F'}+\overline{A_3F'}+\overline{A_4F'}+\overline{A_5F'}+\overline{A_6F'} \\ =\overline{A_6F}+\overline{A_5F}+\overline{A_4F}+\overline{A_1F}+\overline{A_3F}+\overline{A_2F} \\ =(\overline{A_4F}+\overline{A_1F'})+(\overline{A_5F}+\overline{A_2F'})+(\overline{A_6F}+\overline{A_3F'}) \\ =10+10+10=30 \end{aligned}$$

같은 방법으로

$$\overline{A_7F'}+\overline{A_8F'}+\overline{A_9F'}+\overline{A_{10}F'}+\overline{A_{11}F'}+\overline{A_{12}F'}=30$$

$$\therefore \overline{A_1F'}+\overline{A_2F'}+\overline{A_3F'}+\dots+\overline{A_{12}F'}=30+30=60$$

120 타원과 직선의 위치 관계

전략 타원과 직선이 만나기 위한 조건을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 타원

$$\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$$
은 타원이 함수

$y=f(x)$ 의 그래프에 접할 때 서로

다른 두 점에서 만나고, 타원이 두

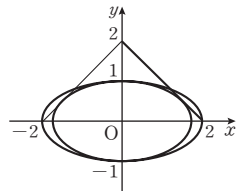
점 $(-2, 0), (2, 0)$ 을 지날 때 서로 다른 네 점에서 만난다.

$y=x+2$ 를 $\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$ 에 대입하면

$$\frac{x^2}{k^2}+(x+2)^2=1, x^2+k^2(x+2)^2=k^2$$

$$\therefore (k^2+1)x^2+4k^2x+3k^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면



$$\frac{D}{4}=(2k^2)^2-(k^2+1) \times 3k^2=0$$

$$k^4-3k^2=0, k^2(k^2-3)=0$$

$$k^2(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3})=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=-\sqrt{3} \text{ 또는 } k=\sqrt{3}$$

그런데 $k>1$ 이므로 $k=\sqrt{3}$

타원 $\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$ 이 점 $(2, 0)$ 을 지나면

$$\frac{4}{k^2}=1, k^2=4$$

$$\therefore k=2 (\because k>1)$$

따라서 $\sqrt{3}<k \leq 2$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 타원이 서로 다른 네 점에서 만난다.

121 타원의 접선의 방정식; 접점의 좌표가 주어진 경우

전략 타원의 방정식, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 삼각형의 넓이의 최솟값을 구한다.

풀이 점 P 의 좌표를 (x_1, y_1) ($x_1>0, y_1>0$)이라 하면 타원 $4x^2+y^2=12$, 즉 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의

접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{3}+\frac{y_1y}{12}=1$ 이므로

$$A\left(\frac{3}{x_1}, 0\right), B\left(0, \frac{12}{y_1}\right)$$

$\triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{x_1} \times \frac{12}{y_1} = \frac{18}{x_1y_1}$$

또, 점 P 는 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{3}+\frac{y_1^2}{12}=1$$

$\frac{x_1^2}{3}>0, \frac{y_1^2}{12}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x_1^2}{3}+\frac{y_1^2}{12} \geq 2\sqrt{\frac{x_1^2}{3} \times \frac{y_1^2}{12}}$$

$$1 \geq \frac{x_1y_1}{3}, x_1y_1 \leq 3 \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{x_1^2}{3}=\frac{y_1^2}{12} \text{일 때 성립} \right)$$

$$\therefore \frac{18}{x_1y_1} \geq 6$$

따라서 $\triangle OAB$ 의 넓이의 최솟값은 6이다.

122 쌍곡선의 방정식 + 쌍곡선의 점근선

전략 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$)이라 하고 주어진 조건을 이용하여 a, b 에 대한 관계식을 세운다.

풀이 초점이 x 축 위에 있고 중심이 원점이므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$)이라 하자.

조건 (가)에서 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2}, 0), (-3\sqrt{2}, 0)$ 이므로

$$a^2+b^2=(3\sqrt{2})^2=18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 두 점근선이 서로 수직이고 두 점근선의 방정식

$$\text{은 } y=\frac{b}{a}x, y=-\frac{b}{a}x \text{이므로}$$

$$\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1 \quad \therefore b^2 = a^2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①을 ⑦에 대입하면

$$a^2 + a^2 = 18, a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 (\because a > 0)$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a = 6$

123 쌍곡선의 정의의 활용

전략 쌍곡선의 정의를 이용하여 $\overline{PQ} + \overline{PF'}$ 이 최소일 조건을 구한다.

풀이 쌍곡선의 주축의 길이가 $2 \times 3 = 6$ 이므로 $a^2 = 9$

점 P가 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 6$$

$$\overline{PQ} + \overline{PF'} = \overline{PQ} + (\overline{PF} + 6) = (\overline{PQ} + \overline{PF}) + 6$$

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q가 직선 AF 위에 있을 때 $\overline{PQ} + \overline{PF}$ 는 최소이므로 직선 AF가 쌍곡

선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 원 C와 만나

는 점을 각각 P', Q'이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{PQ} + \overline{PF'} &\geq (\overline{P'Q'} + \overline{P'F'}) + 6 \\ &= (\overline{AF} - 1) + 6 \\ &= \sqrt{c^2 + 16} + 5 \end{aligned}$$

이때 $\overline{PQ} + \overline{PF'}$ 의 최솟값이 11이므로

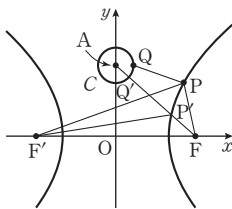
$$\sqrt{c^2 + 16} + 5 = 11, \sqrt{c^2 + 16} = 6$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$c^2 + 16 = 36 \quad \therefore c^2 = 20$$

따라서 $b^2 = c^2 - a^2 = 20 - 9 = 11$ 이므로

$$a^2 + 2b^2 = 9 + 2 \times 11 = 31$$



124 쌍곡선의 접선의 방정식; 접점의 좌표가 주어진 경우

전략 쌍곡선의 접선이 타원의 넓이를 이등분하려면 타원의 중심을 지나야 함을 이용한다.

풀이 점 (a, b) 는 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{12} - \frac{b^2}{8} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{12} - \frac{by}{8} = 1$$

이 직선이 타원 $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하려면 타

원의 중심 $(2, 0)$ 을 지나야 하므로

$$\frac{a}{6} = 1 \quad \therefore a = 6$$

$a = 6$ 을 ①에 대입하면

$$3 - \frac{b^2}{8} = 1, \frac{b^2}{8} = 2 \quad \therefore b^2 = 16$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6^2 + 16 = 52$$

II

평면벡터

04 벡터의 연산

교과서에서 뽑은 11문제

pp. 36~37

125 (1) 5 (2) 3 (3) $\sqrt{34}$ (4) $\sqrt{34}$

126 (1) $\overrightarrow{OD}$ (2) $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}$

127 (1) $\overrightarrow{AD}$ (2) $\vec{0}$ 128 (1) $3\vec{a} + \vec{b}$ (2) $-\frac{5}{6}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

129 (1) $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$ (2) $\vec{x} = 6\vec{a} + \vec{b}$ 130 3

125 (1) $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = 5$ 이므로 $|\overrightarrow{AD}| = 5$

(2) $|\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}| = 3$ 이므로 $|\overrightarrow{DC}| = 3$

(3) $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ 이므로 $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{34}$

(4) $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{DC}|^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ 이므로 $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{34}$

126 (1) $\overrightarrow{BO}$ 와 서로 같은 벡터는 $\overrightarrow{OD}$

(2) $\overrightarrow{AD}$ 와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}$

127 (1) $\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD} \end{aligned}$

(2) $\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + (-\overrightarrow{AB}) &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{AA} = \vec{0} \end{aligned}$

128 (1) $\begin{aligned} 4(\vec{a} - \vec{b}) + (-\vec{a} + 5\vec{b}) &= 4\vec{a} - 4\vec{b} - \vec{a} + 5\vec{b} \\ &= 3\vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$

(2) $\begin{aligned} \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(3\vec{a} - 2\vec{b}) &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{3} + 1\right)\vec{b} \\ &= -\frac{5}{6}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} \end{aligned}$

129 (1) $\begin{aligned} 5\vec{a} - \vec{x} &= 4\vec{a} + 2\vec{b} \text{에서} \\ -\vec{x} &= 4\vec{a} + 2\vec{b} - 5\vec{a} = -\vec{a} + 2\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} \end{aligned}$

(2) $\begin{aligned} 2(\vec{x} - 3\vec{a}) &= \vec{b} + \vec{x} \text{에서} \\ 2\vec{x} - 6\vec{a} &= \vec{b} + \vec{x} \quad \therefore \vec{x} = 6\vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$

130 두 벡터 $k\vec{a} - \vec{b}$ 와 $6\vec{a} - 2\vec{b}$ 가 서로 평행하므로 0이 아닌 실수 t 에 대하여

$$k\vec{a} - \vec{b} = t(6\vec{a} - 2\vec{b}) = 6t\vec{a} - 2t\vec{b}$$

따라서 $k = 6t, -1 = -2t$ 이므로 $t = \frac{1}{2}, k = 3$

유형 분석 기출 문제

pp. 38~43

- 131 ② 132 ④ 133 6 134 ① 135 ③
 136 ① 137 5 138 ③ 139 $\frac{4}{3}$
 140 $\frac{5}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}$ 141 ④ 142 -5 143 $4\sqrt{3}$
 144 ④ 145 -121 146 32 147 ③ 148 $-\frac{3}{2}$
 149 ② 150 10 151 $\frac{1}{3}$ 152 ④ 153 ④
 154 3 155 ② 156 9

131 정육각형의 한 내각의 크기는

$$\frac{180^\circ \times (6-2)}{6} = 120^\circ$$

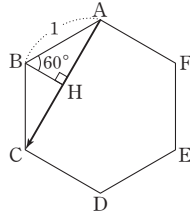
$\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle ABH = 60^\circ$$

직각삼각형 BHA에서

$$\overline{AH} = \overline{AB} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore |\overline{AC}| = \overline{AC} = 2\overline{AH} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$



132 정육각형 ABCDEF는 한 변의 길이가 a 인 정삼각형으로 이루어져 있다.

ㄱ. $\overline{AB}$ 는 $\overline{DE}$ 와 크기는 같지만 방향이 반대이므로

$$\overline{AB} = -\overline{DE}$$

ㄴ. $\overline{OB}$ 는 $\overline{OE}$ 와 크기는 같지만 방향이 반대이므로

$$\overline{OB} = -\overline{OE}$$

ㄷ. $|\overline{AD}| = \overline{AD} = 2 \times a = 2a$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

133 크기가 1인 18개의 벡터 중 서로 같은 벡터는

$$\overline{AD} = \overline{DB} = \overline{FE}, \overline{DA} = \overline{BD} = \overline{EF},$$

$$\overline{DF} = \overline{BE} = \overline{EC}, \overline{FD} = \overline{EB} = \overline{CE},$$

$$\overline{AF} = \overline{FC} = \overline{DE}, \overline{FA} = \overline{CF} = \overline{ED}$$

이므로 서로 다른 단위벡터의 개수는 6이다.

1등급 비법

벡터는 시점과 종점에 상관없이 그 크기와 방향만 생각하므로 평행이동하여 겹쳐지는 벡터는 모두 같은 벡터이다.

$$\begin{aligned} 134 \quad \overline{DC} + \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{CB} &= (\overline{DC} + \overline{CB}) + \overline{AD} + \overline{BD} \\ &= \overline{DB} + \overline{AD} + \overline{BD} \\ &= (\overline{DB} + \overline{BD}) + \overline{AD} \\ &= (\overline{DB} - \overline{DB}) + \overline{AD} \\ &= \vec{0} + \overline{AD} \\ &= \overline{AD} \end{aligned}$$

135 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점이 O이므로

$$\overline{OA} = \overline{OC}, \overline{OB} = \overline{OD}$$

$$\textcircled{1} \quad \overline{OC} = -\overline{CO} = -\overline{OA} = -\vec{a}$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{DO} = \overline{OB} = \vec{b}$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

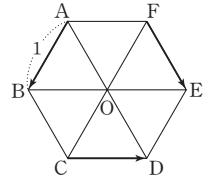
$$\textcircled{4} \quad \overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = -\overline{OB} - \overline{OA} = -\vec{b} - \vec{a}$$

$$\textcircled{5} \quad \overline{CD} = \overline{BA} = -\overline{AB} = -(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} - \vec{b}$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

136 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하면

$$\begin{aligned} |\overline{AB} - \overline{FE} + \overline{CD}| &= |\overline{AB} - \overline{AO} + \overline{CD}| \\ &= |\overline{OB} + \overline{CD}| \\ &= |-\overline{CD} + \overline{CD}| \\ &= 0 \end{aligned}$$



137 $\overline{CB} - \overline{CP} = \overline{PB}$ 이므로

$$|\overline{CB} - \overline{CP}| = |\overline{PB}|$$

즉, $|\overline{CB} - \overline{CP}|$ 의 값이 최대가 되는 경우는 점 P가 점 D에 위치할 때이다. ㉠

$\triangle BCD$ 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

따라서 $|\overline{CB} - \overline{CP}|$ 의 최댓값은 5이다. ㉡

채점 기준	배점 비율
㉠ $ \overline{CB} - \overline{CP} $ 의 값이 최대가 되기 위한 점 P의 위치 알기	50%
㉡ $ \overline{CB} - \overline{CP} $ 의 최댓값 구하기	50%

138 $\overline{PB} + \overline{PC} = \vec{0}$ 에서 $\overline{PB} = -\overline{PC}$

즉, $\overline{PC}$ 는 $\overline{PB}$ 와 크기는 같고 방향이 반대이므로 점 P는 $\overline{BC}$ 의 중점이다.

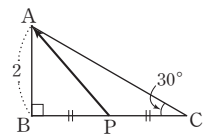
오른쪽 그림의 $\triangle ABC$ 에서

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\tan 30^\circ} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \sqrt{3} \text{ 이므로}$$

직각삼각형 ABP에서

$$|\overline{PA}|^2 = \overline{PA}^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 = 7$$



139 $2(\vec{x} + \vec{a} - 3\vec{b}) = 3\vec{b} + \frac{3}{2}(2\vec{a} - 4\vec{b}) - \vec{x}$ 에서

$$2\vec{x} + 2\vec{a} - 6\vec{b} = 3\vec{b} + 3\vec{a} - 6\vec{b} - \vec{x}, \quad 3\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$$

따라서 $m = \frac{1}{3}$, $n = 1$ 이므로

$$m + n = \frac{4}{3}$$

140 $\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{a}$ ㉠
 $2\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{b}$ ㉡
 ㉠ $\times 2 -$ ㉡을 하면 $7\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$
 $\therefore \vec{y} = \frac{2}{7}\vec{a} - \frac{1}{7}\vec{b}$ ㉢ ㉣
 ㉢을 ㉠에 대입하면
 $\vec{x} + 2\left(\frac{2}{7}\vec{a} - \frac{1}{7}\vec{b}\right) = \vec{a}, \vec{x} + \frac{4}{7}\vec{a} - \frac{2}{7}\vec{b} = \vec{a}$
 $\therefore \vec{x} = \frac{3}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$ ㉤
 $\therefore \vec{x} + \vec{y} = \left(\frac{3}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}\right) + \left(\frac{2}{7}\vec{a} - \frac{1}{7}\vec{b}\right)$
 $= \frac{5}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}$ ㉥

채점 기준	배점 비율
㉣ $\vec{y}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내기	40%
㉤ $\vec{x}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내기	40%
㉥ $\vec{x} + \vec{y}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내기	20%

141 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 이고 $\overline{BC} = 2\overline{AD}$ 이므로
 $\overline{BC} = 2\overline{AD} = 2\vec{b}$
 $\therefore \overline{DB} + \overline{AC} = (\overline{AB} - \overline{AD}) + (\overline{BC} - \overline{BA})$
 $= \overline{AB} - \overline{AD} + \overline{BC} + \overline{AB}$
 $= 2\overline{AB} - \overline{AD} + \overline{BC}$
 $= 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{b}$
 $= 2\vec{a} + \vec{b}$

142 $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE}$
 $= (\overline{OB} - \overline{OA}) + (\overline{OC} - \overline{OA}) + (\overline{OD} - \overline{OA}) + (\overline{OE} - \overline{OA})$
 $= \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE} - 4\overline{OA}$
 이때 $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE} = \vec{0}$ 에서
 $\overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE} = -\overline{OA}$
 이므로
 $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE}$
 $= -\overline{OA} - 4\overline{OA}$
 $= -5\overline{OA}$
 $\therefore k = -5$

143 $(\vec{a} + \vec{b}) - (2\vec{b} - 3\vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$
 $= \vec{c} + 3\vec{c} = 4\vec{c}$
 $|(\vec{a} + \vec{b}) - (2\vec{b} - 3\vec{c})| = 16$ 에서
 $|4\vec{c}| = 4|\vec{c}| = 16 \quad \therefore |\vec{c}| = 4$
 따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 4이므로
 $\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$

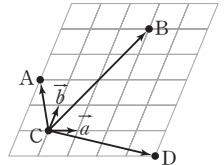
144 $(2x + y - 5)\vec{a} + (3x - y + 10)\vec{b} = \vec{0}$ 에서
 $2x + y - 5 = 0, 3x - y + 10 = 0$
 위의 두 식을 연립하여 풀면 $x = -1, y = 7$
 $\therefore x + y = -1 + 7 = 6$

145 $(2m + 4n)\vec{a} + (4m - 6)\vec{b} = (m - n)\vec{a} + (2m - 5n + 5)\vec{b}$
 에서
 $2m + 4n = m - n, 4m - 6 = 2m - 5n + 5$
 $\therefore m + 5n = 0, 2m + 5n = 11$
 위의 두 식을 연립하여 풀면 $m = 11, n = -\frac{11}{5}$
 $\therefore 5mn = 5 \times 11 \times \left(-\frac{11}{5}\right) = -121$

146 $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \vec{b} - \vec{a}$ ㉠
 $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$
 $= (5\vec{a} + k\vec{b}) - \vec{a} = 4\vec{a} + k\vec{b}$ ㉡ ㉢
 ㉠, ㉡을 $2\overline{AC} = m\overline{AB}$ 에 대입하면
 $2(4\vec{a} + k\vec{b}) = m(\vec{b} - \vec{a})$
 $8\vec{a} + 2k\vec{b} = -m\vec{a} + m\vec{b}$
 따라서 $8 = -m, 2k = m$ 이므로
 $m = -8, k = -4$ ㉣
 $\therefore km = (-4) \times (-8) = 32$ ㉤

채점 기준	배점 비율
㉢ $\overline{AB}, \overline{AC}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내기	30%
㉣ k, m 의 값 구하기	40%
㉤ km 의 값 구하기	30%

147 오른쪽 그림과 같이 가장 작은 평행 사변형에서 가로와 세로의 길이를 이용하여 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 를 잡으면
 $\overline{CA} = -\vec{a} + 2\vec{b}, \overline{CB} = 2\vec{a} + 4\vec{b},$
 $\overline{CD} = 4\vec{a} - \vec{b}$ 이므로
 $\overline{CB} = m\overline{CA} + n\overline{CD}$ 에서
 $2\vec{a} + 4\vec{b} = m(-\vec{a} + 2\vec{b}) + n(4\vec{a} - \vec{b})$
 $= (-m + 4n)\vec{a} + (2m - n)\vec{b}$
 이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로
 $-m + 4n = 2, 2m - n = 4$
 위의 두 식을 연립하여 풀면 $m = \frac{18}{7}, n = \frac{8}{7}$
 $\therefore m - n = \frac{18}{7} - \frac{8}{7} = \frac{10}{7}$



148 두 벡터 $2\vec{a} + 4\vec{b}$ 와 $m\vec{a} - 3\vec{b}$ 가 서로 평행하므로 0이 아닌 실수 k 에 대하여
 $m\vec{a} - 3\vec{b} = k(2\vec{a} + 4\vec{b})$
 $= 2k\vec{a} + 4k\vec{b}$
 이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로
 $m = 2k, -3 = 4k$
 $\therefore k = -\frac{3}{4}, m = -\frac{3}{2}$

149 ㉠. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{a} + (3\vec{a} - 4\vec{b}) = 4\vec{a} - 4\vec{b}$
 $= 4(\vec{a} - \vec{b})$
 ㉡. $\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} - (3\vec{a} - 4\vec{b}) = -2\vec{a} + 4\vec{b}$
 $= -2(\vec{a} - 2\vec{b})$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \vec{b} + \vec{c} &= \vec{b} + (3\vec{a} - 4\vec{b}) = 3\vec{a} - 3\vec{b} \\ &= 3(\vec{a} - \vec{b}) \\ \text{ㄹ. } \vec{b} - \vec{c} &= \vec{b} - (3\vec{a} - 4\vec{b}) = -3\vec{a} + 5\vec{b} \end{aligned}$$

이상에서 $\vec{a} - \vec{b}$ 와 평행한 벡터는 ㄱ, ㄷ이다.

150 $\vec{p} + \vec{q} = (\vec{a} + 2\vec{b}) + (-2\vec{a} + \vec{b})$
 $= -\vec{a} + 3\vec{b}$
 $\vec{q} - \vec{r} = (-2\vec{a} + \vec{b}) - (-5\vec{a} + k\vec{b})$
 $= 3\vec{a} + (1-k)\vec{b}$
 두 벡터 $\vec{p} + \vec{q}$ 와 $\vec{q} - \vec{r}$ 가 서로 평행하려면 0이 아닌 실수 t 에 대하여 $\vec{q} - \vec{r} = t(\vec{p} + \vec{q})$ 이어야 하므로
 $3\vec{a} + (1-k)\vec{b} = t(-\vec{a} + 3\vec{b})$
 $= -t\vec{a} + 3t\vec{b}$
 이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로
 $3 = -t, 1-k = 3t$
 $\therefore t = -3, k = 10$

151 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2\vec{a} - 2\vec{b}) - (\vec{a} + 3\vec{b})$
 $= \vec{a} - 5\vec{b}$
 $\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = (-m\vec{a} + 6\vec{b}) - \{\vec{a} + (m-1)\vec{b}\}$
 $= (-m-1)\vec{a} + (-m+7)\vec{b}$ ㉠
 두 벡터 $\vec{AB}$ 와 $\vec{CD}$ 가 서로 평행하려면 0이 아닌 실수 k 에 대하여 $\vec{CD} = k\vec{AB}$ 이어야 하므로
 $(-m-1)\vec{a} + (-m+7)\vec{b} = k(\vec{a} - 5\vec{b})$
 $= k\vec{a} - 5k\vec{b}$ ㉡
 이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로
 $-m-1 = k, -m+7 = -5k$
 위의 두 식을 연립하여 풀면
 $k = -\frac{4}{3}, m = \frac{1}{3}$ ㉢

채점 기준	배점 비율
㉠ $\vec{AB}$ 와 $\vec{CD}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내기	30%
㉡ $\vec{AB}$ 와 $\vec{CD}$ 가 서로 평행할 조건을 이용하여 $\vec{a}, \vec{b}$ 사이의 관계식 구하기	40%
㉢ m 의 값 구하기	30%

152 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 0이 아닌 실수 t 에 대하여 $\vec{AC} = t\vec{AB}$ 이어야 하므로
 $\vec{OC} - \vec{OA} = t(\vec{OB} - \vec{OA})$
 $(6\vec{a} + k\vec{b}) - 3\vec{a} = t(-2\vec{b} - 3\vec{a})$
 $\therefore 3\vec{a} + k\vec{b} = -3t\vec{a} - 2t\vec{b}$
 이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로
 $3 = -3t, k = -2t$
 $\therefore t = -1, k = 2$

1등급 방법

세 점이 한 직선 위에 있으면 세 점 중 두 점으로 만든 벡터가 모두 평행함을 이용한다.

153 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$ 이고
 $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (2\vec{a} - 3\vec{b}) - \vec{a} = \vec{a} - 3\vec{b}$
 $\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = (-2\vec{a} + 3\vec{b}) - \vec{a} = -3\vec{a} + 3\vec{b} = 3(\vec{b} - \vec{a})$
 $\vec{AE} = \vec{OE} - \vec{OA} = (3\vec{a} - 2\vec{b}) - \vec{a} = 2\vec{a} - 2\vec{b} = -2(\vec{b} - \vec{a})$
 이므로 세 벡터 $\vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AE}$ 중 0이 아닌 실수 k 에 대하여 $k\vec{AB}$ 꼴로 나타낼 수 있는 것은 $\vec{AD}$ 와 $\vec{AE}$ 이다.
 따라서 항상 직선 AB 위의 점인 것은 D와 E이다.

154 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 0이 아닌 실수 k 에 대하여
 $\vec{AC} = k\vec{AB}$
 $\vec{OC} - \vec{OA} = k(\vec{OB} - \vec{OA})$
 $\therefore \vec{OC} = (1-k)\vec{OA} + k\vec{OB}$
 $(2-3t)\vec{p} + t\vec{q} = (1-k)(5\vec{p} - 3\vec{q}) + k(\vec{p} - \vec{q})$
 $= (5-4k)\vec{p} + (-3+2k)\vec{q}$
 이때 두 벡터 $\vec{p}, \vec{q}$ 는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로
 $2-3t = 5-4k, t = -3+2k$
 위의 두 식을 연립하여 풀면
 $k = 3, t = 3$

155 선분 AB의 중점이 P이므로
 $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{a}$
 이때 세 점 P, R, C가 한 직선 위에 있으므로 0이 아닌 실수 k 에 대하여
 $\vec{CR} = k\vec{CP}$
 $\vec{AR} - \vec{AC} = k(\vec{AP} - \vec{AC})$
 $\therefore \vec{AR} = k\vec{AP} + (1-k)\vec{AC} = \frac{k}{2}\vec{a} + (1-k)\vec{b}$ ㉠
 또, 선분 AC를 2:1로 내분하는 점이 Q이므로
 $\vec{AQ} = \frac{2}{3}\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{b}$
 이때 세 점 B, R, Q가 한 직선 위에 있으므로 0이 아닌 실수 t 에 대하여
 $\vec{QR} = t\vec{QB}$
 $\vec{AR} - \vec{AQ} = t(\vec{AB} - \vec{AQ})$
 $\therefore \vec{AR} = t\vec{AB} + (1-t)\vec{AQ} = t\vec{a} + \frac{2(1-t)}{3}\vec{b}$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{k}{2}\vec{a} + (1-k)\vec{b} = t\vec{a} + \frac{2(1-t)}{3}\vec{b}$$

이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로

$$\frac{k}{2} = t, 1-k = \frac{2(1-t)}{3}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $k = \frac{1}{2}, t = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\vec{AR} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

따라서 $m = \frac{1}{4}, n = \frac{1}{2}$ 이므로

$$m+n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

156 $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ 에서 $\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{PC}$

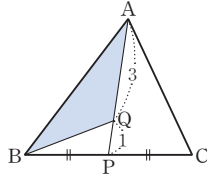
즉, 세 점 P, B, C는 한 직선 위에 있으며 $\overrightarrow{PB}$ 는 $\overrightarrow{PC}$ 와 크기는 같고 방향은 반대이므로 점 P는 선분 BC의 중점이다.

$\overrightarrow{QA} = -3\overrightarrow{QP}$ 에서

세 점 Q, A, P는 한 직선 위에 있으며 $\overrightarrow{QA}$ 는 $\overrightarrow{QP}$ 와 방향은 반대이고 $|\overrightarrow{QA}| : |\overrightarrow{QP}| = 3 : 1$ 이므로 점 Q는 선분 AP를 3 : 1로 내분하는 점이다.

따라서 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned}\triangle ABQ &= \frac{3}{4}\triangle ABP = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\triangle ABC \\ &= \frac{3}{8}\triangle ABC = \frac{3}{8} \times 24 = 9\end{aligned}$$



채점 기준	배점 비율
㉠ 점 P가 BC의 중점임을 알기	30%
㉡ 점 Q가 AP를 3 : 1로 내분하는 점임을 알기	30%
㉢ $\triangle ABQ$ 의 넓이 구하기	40%

실력 완성 | 등급 문제

pp. 44~45

- 157 15 158 ② 159 ④ 160 ③ 161 ⑤
162 1 163 ⑤ 164 B, P, R, Q

157 벡터의 크기와 서로 같은 벡터 + 벡터의 덧셈과 뺄셈

전략 좌표평면 위에 주어진 타원을 그린 후, 타원의 정의를 이용한다.

풀이 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 을 좌

표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{F'O}$ 이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF}| &= |\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{F'O}| \\ &= |\overrightarrow{F'P}| = 1\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{PF'}| = |\overrightarrow{F'P}| = 1$$

또, 타원의 장축의 길이는 $2 \times 2 = 4$ 이고, 타원의 정의에 의하여 $|\overrightarrow{PF'}| + |\overrightarrow{PF}| = 4$, $1 + |\overrightarrow{PF}| = 4 \quad \therefore |\overrightarrow{PF}| = 3$

따라서 $k=3$ 이므로 $5k=5 \times 3=15$

다른풀이 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 을

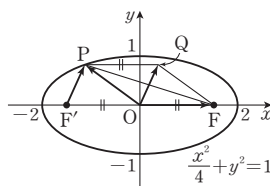
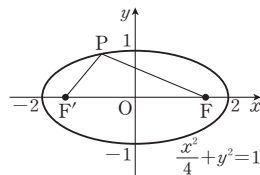
좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같고,

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OQ}$ 라 하면 사각형 OFQP는 평행사변형이다.

또, $\overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{PQ}$ 이므로 사각형 OQPF'도 평행사변형이다.

$$\therefore \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{F'P}$$

이때 $|\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF}| = 1$ 이므로



$$|\overrightarrow{PF'}| = |\overrightarrow{F'P}| = |\overrightarrow{OQ}| = 1$$

타원의 정의에 의하여

$$|\overrightarrow{PF}| + |\overrightarrow{PF'}| = 2 \times 2 = 4, \quad |\overrightarrow{PF}| + 1 = 4$$

$$\therefore |\overrightarrow{PF}| = 3$$

따라서 $k=3$ 이므로 $5k=5 \times 3=15$

참고 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 P, 두 초점 F, F'에 대하여

$$\textcircled{1} a > b > 0 \text{ 일 때, } |\overrightarrow{PF}| + |\overrightarrow{PF'}| = 2a$$

$$\textcircled{2} b > a > 0 \text{ 일 때, } |\overrightarrow{PF}| + |\overrightarrow{PF'}| = 2b$$

158 벡터의 크기와 서로 같은 벡터 + 벡터의 덧셈과 뺄셈

전략 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질을 이용하여 벡터 $\overrightarrow{EG}$ 와 같은 벡터를 찾는다.

풀이 삼각형 ABD에서 두 점 E, G는 각각 두 변 AB, AD의 중점이므로

$$\overrightarrow{EG} \parallel \overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

이때 점 H가 변 BD의 중점이므로

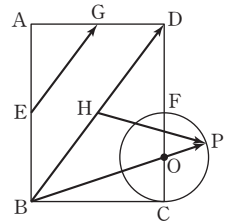
$$\overrightarrow{EG} \parallel \overrightarrow{BH}, \quad \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BH}$$

즉, $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BH}$ 이므로

$$\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{BP}$$

선분 CF의 중점을 O라 하면

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HP}| &= |\overrightarrow{BP}| \\ &= |\overrightarrow{BP}| \\ &\leq |\overrightarrow{BO}| + |\overrightarrow{OP}| \\ &= \sqrt{6^2 + 2^2} + 2 \\ &= 2 + 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

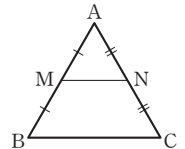


개념 보충

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질

$\triangle ABC$ 에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면

$$\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$



159 벡터의 덧셈과 뺄셈 + 벡터의 실수배

전략 $\overrightarrow{AQ'} = 2\overrightarrow{AQ}$ 로 놓고 주어진 식을 만족시키는 점 R를 구해 본다.

풀이 변 AD 위에 $2\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AQ'}$ 이 되도록 점 Q'을 잡으면 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ'}$ 이므로

$$\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ'} = \overrightarrow{AR}$$

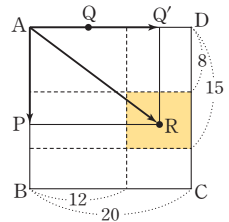
를 만족시키는 점 R는 $\square APRQ'$ 이 직사각형이 되도록 하는 점이다.

$$8 \leq |\overrightarrow{AP}| \leq 15, \quad 12 \leq |\overrightarrow{AQ'}| \leq 20 \text{ 이므로}$$

$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ'} = \overrightarrow{AR}$ 를 만족시키는 점 R는 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 있다.

따라서 점 R가 나타내는 도형의 넓이는

$$(20 - 12) \times (15 - 8) = 8 \times 7 = 56$$



160 벡터의 평행

[전략] $\vec{x}, \vec{y}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타낸 후, $\vec{x}, \vec{y}$ 가 서로 평행할 조건을 이용한다.

[풀이] $\vec{a} + 2\vec{x} = t\vec{a} + 2\vec{b}$ 에서

$$2\vec{x} = (t-1)\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{t-1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

위의 식을 $2\vec{x} + \vec{y} = -3\vec{a} - \vec{b}$ 에 대입하면

$$(t-1)\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{y} = -3\vec{a} - \vec{b}$$

$$\therefore \vec{y} = (-t-2)\vec{a} - 3\vec{b}$$

두 벡터 $\vec{x}, \vec{y}$ 가 서로 평행하려면 0이 아닌 실수 m 에 대하여 $\vec{y} = m\vec{x}$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} (-t-2)\vec{a} - 3\vec{b} &= m\left(\frac{t-1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) \\ &= \frac{m(t-1)}{2}\vec{a} + m\vec{b} \end{aligned}$$

이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로

$$-t-2 = \frac{m(t-1)}{2}, -3 = m$$

$$\therefore m = -3, t = 7$$

161 벡터의 덧셈과 뺄셈 ⊕ 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

[전략] 벡터의 뺄셈과 실수배를 이용하여 세 점 A, B, C의 위치 관계를 파악한다.

[풀이] $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (2\vec{b} - \vec{a}) - \vec{a} = 2(\vec{b} - \vec{a})$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

ㄱ. $\vec{AC} = 2\vec{AB}$ 이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

ㄴ. $|\vec{AC}| = 2|\vec{AB}|$

ㄷ. $\vec{OC} = 2\vec{b} - \vec{a} = 2\vec{OB} - \vec{OA}$ 에서

$$\begin{aligned} \vec{OC} - \vec{OB} &= \vec{OB} - \vec{OA} \\ &= -(\vec{OA} - \vec{OB}) \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{BC} = -\vec{BA}$$

따라서 두 벡터 $\vec{BA}, \vec{BC}$ 는 방향이 서로 반대이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

162 벡터의 덧셈과 뺄셈 ⊕ 세 점이 한 직선 위에 있을 조건의 활용

[전략] 점 C에서 $\vec{OA}$ 와 $\vec{OB}$ 에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면 $\vec{OC}$ 는 두 변 OP, OQ를 이룬 변으로 하는 직사각형의 대각선을 이용한다.

[풀이] 오른쪽 그림과 같이 점 C에서

$\vec{OA}$ 와 $\vec{OB}$ 에 내린 수선의 발을 각각

P, Q라 하면

$$\vec{OC} = \vec{OP} + \vec{OQ}$$

직각삼각형 COP에서

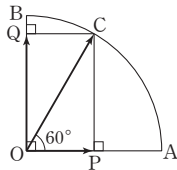
$$\overline{OP} = \overline{OC} \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\overline{CP} = \overline{OC} \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{OQ} = \overline{CP} = 2\sqrt{3}$$

세 점 O, P, A가 한 직선 위에 있고 $\overline{OP} = 2, \overline{OA} = 4$ 이므로

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}$$



또, 세 점 O, Q, B가 한 직선 위에 있고 $\overline{OQ} = 2\sqrt{3}, \overline{OB} = 4$ 이므로

$$\vec{OQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{OC} &= \vec{OP} + \vec{OQ} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $m = \frac{1}{2}, n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$m^2 + n^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

163 벡터의 덧셈과 뺄셈

[1단계] $\vec{AC}$ 와 $\vec{OB}$ 의 교점을 H라 하고 $|\vec{OH}|$ 를 k 로 나타낸다.

오른쪽 그림에서 $\vec{AC}$ 와 $\vec{OB}$ 의 교점

을 H라 하면 $\triangle ABC$ 와 $\triangle ACO$ 는

모두 이등변삼각형이므로

$$\vec{AC} \perp \vec{OB}$$

직각삼각형 AHO에서

$$|\vec{OH}| = |\vec{a}| \cos 72^\circ = 2k$$

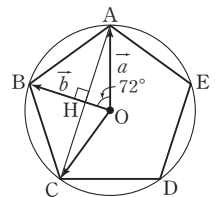
[2단계] 단위벡터 $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 를 이용하여 $\vec{OH}$ 를 $\vec{b}$ 로 나타낸다.

$$\therefore \vec{OH} = 2k \times \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = 2k \times \frac{\vec{b}}{2} = k\vec{b}$$

[3단계] 벡터의 덧셈을 이용하여 $\vec{OC}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타낸다.

$$\vec{OA} + \vec{OC} = 2\vec{OH} \text{이므로}$$

$$\vec{OC} = 2\vec{OH} - \vec{OA} = 2k\vec{b} - \vec{a}$$



164 세 점이 한 직선 위에 있을 조건의 활용

[1단계] $\vec{AC} = k\vec{AB}$ ($k \neq 0$)이면 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있음을 이용하여 세 점 P, Q, R의 위치를 파악한다.

(i) $3\vec{AP} = 4\vec{AB}$ 에서 $\vec{AP} = \frac{4}{3}\vec{AB}$ 이므로 $\vec{AP}$ 와 $\vec{AB}$ 의 방향은 같다.

이때 $|\vec{AP}| : |\vec{AB}| = 4 : 3$ 이므로 점 P는 $\vec{AB}$ 를 4 : 1로 외분하는 점이다.

(ii) $3\vec{PQ} = \vec{AQ}$ 에서 $\vec{PQ}$ 와 $\vec{AQ}$ 의 방향은 같다.

이때 $|\vec{PQ}| : |\vec{AQ}| = 1 : 3$ 이므로 점 Q는 $\vec{AP}$ 를 3 : 1로 외분하는 점이다.

(iii) $\vec{QB} = -3\vec{PR}$ 에서 $\vec{QB}$ 와 $\vec{PR}$ 의 방향은 서로 반대이다.

이때 $|\vec{QB}| : |\vec{PR}| = 3 : 1$ 이고, 세 점 B, P, Q가 한 직선 위에 있으므로 점 R는 두 점 P, Q 사이에 있다.

[2단계] 다섯 개의 점 A, B, P, Q, R를 그림으로 나타낸다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 다섯 개의 점 A, B, P, Q, R를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[3단계] 점 A에서 가까운 점부터 차례로 구한다.

따라서 점 A에서 가까운 점부터 차례로 나열하면 B, P, R, Q이다.

05 평면벡터의 성분과 내적

교과서에서 뽑은 기본 문제

pp. 46~48

165 (1) $\vec{a}-\vec{b}$ (2) $\vec{a}-\vec{c}$ (3) $-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

166 (1) $\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ (2) $-2\vec{a}+3\vec{b}$ (3) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

167 (1) $\sqrt{37}$ (2) (3, 3) (3) (9, -5) (4) (6, -8)

168 (-5, 1), $\sqrt{26}$ 169 (1) 1 (2) -3

170 (1) 6 (2) 5 171 (1) $3\sqrt{3}$ (2) 3 (3) 0 (4) -3

172 6

173 (1) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2}$ (2) $x+5=\frac{y-1}{2}$

174 (1) $x+3y-1=0$ (2) $x-4y+5=0$

175 (1) -6 (2) $\frac{2}{3}$

176 (1) $x^2+y^2=9$ (2) $(x+7)^2+(y-4)^2=25$

165 (1) $\vec{BA}=\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{a}-\vec{b}$
 (2) $\vec{CA}=\vec{OA}-\vec{OC}=\vec{a}-\vec{c}$
 (3) $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{BC}=\vec{OC}-\vec{OB}=\vec{c}-\vec{b}$ 이므로
 $2\vec{AB}-\vec{BC}=2(\vec{b}-\vec{a})-(\vec{c}-\vec{b})$
 $=2\vec{b}-2\vec{a}-\vec{c}+\vec{b}$
 $=-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

166 (1) $\frac{1\times\vec{b}+2\times\vec{a}}{1+2}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$
 (2) $\frac{3\times\vec{b}-2\times\vec{a}}{3-2}=-2\vec{a}+3\vec{b}$

167 (1) $|\vec{a}|=\sqrt{6^2+(-1)^2}=\sqrt{37}$
 (2) $\vec{a}+\vec{b}=(6, -1)+(-3, 4)$
 $= (6+(-3), -1+4)=(3, 3)$
 (3) $\vec{a}-\vec{b}=(6, -1)-(-3, 4)$
 $= (6-(-3), -1-4)=(9, -5)$
 (4) $-2\vec{b}=-2(-3, 4)=(6, -8)$

168 $\vec{AB}=(-2-3, 6-5)=(-5, 1)$
 $|\vec{AB}|=\sqrt{(-5)^2+1^2}=\sqrt{26}$

169 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5\times(-1)+3\times2=1$
 (2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times4+(-7)\times1=-3$

170 (1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ 이므로
 $5^2=2^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2$, $2\vec{a}\cdot\vec{b}=12$
 $\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=6$
 (2) $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$
 $=4\times2^2-12\times6+9\times3^2=25$
 $\therefore |2\vec{a}-3\vec{b}|=5$

171 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 30^\circ=2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$
 (2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=2\times3\times\frac{1}{2}=3$
 (3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ=2\times3\times0=0$
 (4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=-2\times3\times\frac{1}{2}=-3$

172 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 서로 수직이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 이므로
 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-3)\times8+x\times4=-24+4x=0$
 $4x=24 \quad \therefore x=6$

173 (2) $\frac{x-(-5)}{1}=\frac{y-1}{2} \quad \therefore x+5=\frac{y-1}{2}$

174 (1) $2\{x-(-2)\}+6(y-1)=0 \quad \therefore x+3y-1=0$
 (2) $-(x-3)+4(y-2)=0 \quad \therefore x-4y+5=0$

175 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 라 하면
 $\vec{u}=(a, 2)$, $\vec{v}=(-3, 1)$
 (1) 두 직선이 서로 평행하므로 $\vec{u}=k\vec{v}$ ($k\neq0$)에서
 $(a, 2)=k(-3, 1)$
 $a=-3k$, $2=k \quad \therefore a=-6$
 (2) 두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ 에서
 $a\times(-3)+2\times1=0$, $-3a+2=0 \quad \therefore a=\frac{2}{3}$

176 두 점 C(-7, 4), P(x, y)의 위치벡터는 각각
 $\vec{c}=(-7, 4)$, $\vec{p}=(x, y)$ 이므로
 (1) $|\vec{p}|=3$ 에서 $\vec{p}\cdot\vec{p}=3^2$
 $(x, y)\cdot(x, y)=3^2 \quad \therefore x^2+y^2=9$
 (2) $|\vec{p}-\vec{c}|=5$ 에서 $(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=5^2$
 $(x+7, y-4)\cdot(x+7, y-4)=5^2$
 $\therefore (x+7)^2+(y-4)^2=25$

유형 분석 기출 문제

pp. 49~56

177 ④	178 0	179 2	180 ①	181 $\frac{4}{9}$
182 ②	183 $-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$		184 ③	185 ②
186 30	187 ②	188 10	189 24	190 ①
191 ④	192 $-\frac{7}{4}$	193 ②	194 14	195 ⑤
196 ④	197 ⑤	198 ③	199 ④	200 ③
201 $\frac{\sqrt{3}}{2}$	202 3	203 ④	204 ②	205 ②
206 $\frac{5}{3}$	207 2	208 52	209 $\frac{5}{7}$	210 -2
211 ⑤	212 45°	213 (1) $(x+1)^2+y^2=18$		(2) 18π
214 ②				

177 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 이므로

$$\begin{aligned} ① \overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}) \\ &= -\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC} \\ &= -\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA} &= (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}) \\ &= -2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \\ &= -2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ③ 2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC} &= 2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}) \\ &= 3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC} \\ &= 3\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ④ 3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA} &= 3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}) \\ &= -4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \\ &= -4\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ⑤ \overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}) \\ &= -2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \\ &= -2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ④이다.

178 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-4(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+3(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}) \\ &= 2\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}-7\overrightarrow{OC} \\ &= 2\vec{a}+5\vec{b}-7\vec{c} \end{aligned}$$

따라서 $x=2, y=5, z=-7$ 이므로

$$x+y+z=2+5-7=0$$

채점 기준	배점 비율
㉠ $\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 로 나타내기	80%
㉡ $x+y+z$ 의 값 구하기	20%

179 점 P는 선분 AB를 3:1로 내분하는 점이므로

$$\vec{p}=\frac{3\vec{b}+\vec{a}}{3+1}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

점 Q는 선분 AB를 4:1로 외분하는 점이므로

$$\vec{q}=\frac{4\vec{b}-\vec{a}}{4-1}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$$

$$\therefore \vec{p}+\vec{q}=-\frac{1}{12}\vec{a}+\frac{25}{12}\vec{b}$$

따라서 $m=-\frac{1}{12}, n=\frac{25}{12}$ 이므로

$$m+n=-\frac{1}{12}+\frac{25}{12}=2$$

180 $\triangle ABC$ 에서 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$$

즉, 점 D는 선분 BC를 2:3으로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2\vec{b}+3\vec{a}}{2+3}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

따라서 $m=\frac{3}{5}, n=\frac{2}{5}$ 이므로 $mn=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$

181 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}$ 로 놓으면

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$$

두 점 M, N이 각각 $\overline{BC}, \overline{CD}$ 의 중점이므로

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})}{2}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}=\frac{(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}}{2}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{2}$$

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$$

따라서 $x=\frac{2}{3}, y=\frac{2}{3}$ 이므로

$$xy=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

다른풀이 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}$ 로 놓으면

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$$

..... ㉠

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

..... ㉡

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}$$

..... ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{AN}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \vec{a}+\vec{b} &= x\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+y\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right) \\ &= \left(x+\frac{y}{2}\right)\vec{a}+\left(\frac{x}{2}+y\right)\vec{b} \end{aligned}$$

이때 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$$1=x+\frac{y}{2}, 1=\frac{x}{2}+y$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=\frac{2}{3}, y=\frac{2}{3}$

$$\therefore xy=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

182 $2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}+4\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ 에서

$$-4\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}, 4\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}$$

$$\therefore \frac{4}{5}\overrightarrow{CD}=\frac{2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}}{5}$$

이때 $\overrightarrow{DP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CD}$ 라 하면

$$\overrightarrow{DP}=\frac{2\overrightarrow{DA}+3\overrightarrow{DB}}{5}$$

이므로 점 P는 선분 AB를 3:2로 내분하는 점이다.

또, $\overrightarrow{DP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CD}$ 에서

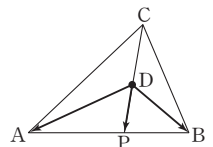
$$|\overrightarrow{CD}|:|\overrightarrow{DP}|=5:4$$

이므로 점 D는 선분 CP를 5:4로 내분하는 점이다.

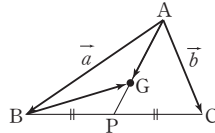
$$\therefore \triangle ADC=\frac{5}{9}\triangle APC$$

$$=\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}\triangle ABC$$

$$=\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}\times 24=8$$



- 183 오른쪽 그림과 같이 선분 AG의 연장선과 변 BC의 교점을 P라 하면 점 P는 선분 BC의 중점이고, 점 G는 선분 AP를 2:1로 내분하는 점



$$\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{AG} + (\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} \\ &= 2 \times \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} - \vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

채점 기준	배점 비율
㉑ $\overrightarrow{AG}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내기	60%
㉒ $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내기	40%

- 184 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$

점 G는 $\triangle OAB$ 의 무게중심이므로 $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$
 $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$

$$= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OG}$$

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\therefore \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3} = \frac{\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})}{3} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

또, 점 H도 $\triangle OBC$ 의 무게중심이므로 같은 방법으로 하면

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}}{3} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} - \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

- 185 $m+n=1$ 이므로

$$\overrightarrow{OP} = 2m\overrightarrow{OA} + 3n\overrightarrow{OB} = \frac{m(2\overrightarrow{OA}) + n(3\overrightarrow{OB})}{m+n}$$

이때 $m \geq 0, n \geq 0$ 이므로 점 P가 나타내는 도형은 두 벡터 $2\overrightarrow{OA}, 3\overrightarrow{OB}$ 의 중점을 연결한 선분이다.

이때 $\overrightarrow{OA} = (3, 2), \overrightarrow{OB} = (2, -1)$ 이므로

$$3\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA} = 3(2, -1) - 2(3, 2)$$

$$= (6, -3) - (6, 4) = (0, -7)$$

따라서 구하는 도형의 길이는 $\sqrt{0^2 + (-7)^2} = 7$

1등급 비법

$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ 를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형

① $m+n=1 \Rightarrow$ 직선 AB

② $m \geq 0, n \geq 0, m+n=1 \Rightarrow$ 선분 AB

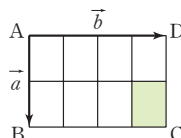
③ $m \geq 0, n \geq 0, m+n \leq 1 \Rightarrow$ 삼각형 OAB의 내부와 그 둘레

④ $0 \leq m \leq 1, 0 \leq n \leq 1 \Rightarrow$ 두 선분 OA, OB를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형의 내부와 그 둘레

- 186 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD}$ 이고

$$\frac{1}{2} \leq m \leq 1, \frac{3}{4} \leq n \leq 1 \text{이므로 점 P가}$$

나타내는 영역은 오른쪽 그림에서 색칠한 직사각형의 내부와 그 둘레이다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

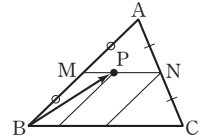
$$(12 \times 20) \times \frac{1}{8} = 30$$

- 187 $3\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = k\overrightarrow{BC}$ 에서

$$3(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BP}) + 2(-\overrightarrow{BP}) + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BP}) = k\overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1-k}{6}\overrightarrow{BC}$$

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면 k가 실수일 때, 점 P는 직선 MN 위에 있다.



$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 이고 점 P가 삼각형 ABC의 내부에 있으므로

실수 k의 값의 범위는

$$0 < \frac{1-k}{6} < \frac{1}{2} \quad \therefore -2 < k < 1$$

따라서 구하는 모든 정수 k의 값의 합은

$$-1 + 0 = -1$$

- 188 $3(\vec{a} + \vec{x}) - 5(\vec{b} - \vec{c}) = 2(\vec{a} - \vec{b} + \vec{x})$ 에서

$$3\vec{a} + 3\vec{x} - 5\vec{b} + 5\vec{c} = 2\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{x}$$

$$\therefore \vec{x} = -\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$$

$$= -(-1, 3) + 3(5, 2) - 5(2, -1)$$

$$= (6, 8)$$

$$\therefore |\vec{x}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

- 189 $\vec{a} + \vec{b} = (4t-2, -1) + (2, 1+\frac{3}{t})$

$$= (4t, \frac{3}{t})$$

이므로

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (4t)^2 + \left(\frac{3}{t}\right)^2 = 16t^2 + \frac{9}{t^2}$$

$16t^2 > 0, \frac{9}{t^2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의

하여

$$16t^2 + \frac{9}{t^2} \geq 2\sqrt{16t^2 \times \frac{9}{t^2}}$$

$$= 2 \times 12 = 24$$

$$\left(\text{단, 등호는 } 16t^2 = \frac{9}{t^2}, \text{ 즉 } t = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{일 때 성립} \right)$$

따라서 $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ 의 최솟값은 24이다.

- 190 $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ 에서

$$(1, -5) = m(2, 4) + n(3, -1)$$

$$= (2m+3n, 4m-n)$$

$$\therefore 2m+3n=1, 4m-n=-5$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$m=-1, n=1$$

$$\therefore m+n=-1+1=0$$

191 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 5) - (3, -2) = (-1, 7)$
 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (x, y) - (0, 3) = (x, y-3)$
 이때 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 이므로
 $x = -1, y - 3 = 7$
 $\therefore x = -1, y = 10$
 $\therefore x + y = -1 + 10 = 9$

192 모눈종이의 가로, 세로의 한 칸의 크기를 각각 1이라 하고 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 의 시점을 좌표평면 위의 원점으로 놓아 각각 성분을 이용하여 나타내면
 $\vec{a} = (-2, -2), \vec{b} = (-3, 1), \vec{c} = (3, 5)$ ㉠
 $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ 에서
 $(3, 5) = p(-2, -2) + q(-3, 1)$
 $= (-2p - 3q, -2p + q)$
 $\therefore -2p - 3q = 3, -2p + q = 5$
 위의 두 식을 연립하여 풀면
 $p = -\frac{9}{4}, q = \frac{1}{2}$ ㉡
 $\therefore p + q = -\frac{9}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{7}{4}$ ㉢

채점 기준	배점 비율
㉠ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 를 성분으로 나타내기	30%
㉡ p, q 의 값 구하기	50%
㉢ $p + q$ 의 값 구하기	20%

193 $\vec{a} + k\vec{b} = (1, -2) + k(2, 0) = (1 + 2k, -2)$
 $\vec{a} - \vec{c} = (1, -2) - (4, -4) = (-3, 2)$
 두 벡터 $\vec{a} + k\vec{b}, \vec{a} - \vec{c}$ 가 서로 평행하므로
 $\vec{a} + k\vec{b} = t(\vec{a} - \vec{c})$ ($t \neq 0$ 인 실수)라 하면
 $(1 + 2k, -2) = t(-3, 2)$
 $\therefore 1 + 2k = -3t, -2 = 2t$
 위의 두 식을 연립하여 풀면
 $t = -1, k = 1$
다른풀이 $\vec{a} + k\vec{b} = (1 + 2k, -2), \vec{a} - \vec{c} = (-3, 2)$ 가 서로 평행하므로 두 벡터의 각 성분의 비가 일정하다.
 즉, $\frac{1 + 2k}{-3} = \frac{-2}{2}$ 이므로
 $2 + 4k = 6, 4k = 4 \therefore k = 1$

194 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로
 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ ($k \neq 0$ 인 실수)라 하면
 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3, x) - (-3, 5) = (6, x - 5),$
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-5, 2) - (-3, 5) = (-2, -3)$
 이므로
 $(6, x - 5) = k(-2, -3)$
 $\therefore 6 = -2k, x - 5 = -3k$
 위의 두 식을 연립하여 풀면
 $k = -3, x = 14$

195 $\overrightarrow{OA} = (4, 2),$
 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (2, 0) - (0, 2) = (2, -2)$
 이므로
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = (4, 2) \cdot (2, -2)$
 $= 4 \times 2 + 2 \times (-2) = 4$

196 $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$ 에서 $|\vec{a}|^2 = 8$ 이므로 $(2k + 1)^2 + 2^2 = 8$
 $4k^2 + 4k - 3 = 0, (2k + 3)(2k - 1) = 0$
 $\therefore k = -\frac{3}{2} (\because k < 0)$
 따라서 $\vec{a} = (-2, 2), \vec{b} = (-1, \frac{1}{2})$ 이므로
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 2) \cdot (-1, \frac{1}{2})$
 $= (-2) \times (-1) + 2 \times \frac{1}{2} = 3$

197 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ 의 양변을 제곱하면
 $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7, 2^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 1^2 = 7$
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$
 $\therefore (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2$
 $= 2^2 + 1 - 2 \times 1^2 = 3$

198 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ 의 양변을 제곱하면
 $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4$ ㉠
 $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$ 의 양변을 제곱하면
 $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1$ ㉡
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면
 $2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 = 5 \therefore |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = \frac{5}{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면
 $4\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{4}$
 $\therefore |2\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} - 2\vec{b}|^2$
 $= 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$
 $= 5(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - 8\vec{a} \cdot \vec{b}$
 $= 5 \times \frac{5}{2} - 8 \times \frac{3}{4} = \frac{13}{2}$

199 $\vec{a} + \vec{b} = (4, -2) + (-1, 3) = (3, 1),$
 $\vec{a} - \vec{b} = (4, -2) - (-1, 3) = (5, -5)$
 이므로
 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 3 \times 5 + 1 \times (-5) = 10$
 $\therefore \cos x^\circ = \frac{10}{\sqrt{3^2 + 1^2} \sqrt{5^2 + (-5)^2}}$
 $= \frac{10}{\sqrt{10} \times 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

200 $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$ 의 양변을 제곱하면
 $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1$
 $1^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 1^2 = 1$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 x° ($0^\circ \leq x^\circ \leq 90^\circ$)라 하면

$$\cos x^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x^\circ = 60^\circ$$

201 $|3\vec{a} + \vec{b}| \leq 7$ 에서 $|3\vec{a} + \vec{b}|^2 \leq 49$

$$9|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \leq 49$$

$$9 \times (\sqrt{3})^2 + 6|\vec{a}| |\vec{b}| \cos x^\circ + 2^2 \leq 49$$

$$6 \times \sqrt{3} \times 2 \times \cos x^\circ \leq 18$$

$$\therefore \cos x^\circ \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\cos x^\circ$ 의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

202 정육각형의 한 내각의 크기는 120° 이므로
이등변삼각형 ABC에서 $\angle BCA = 30^\circ$
이때 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ 이므로 $\angle CAD = \angle BCA = 30^\circ$
따라서 $|\overline{AC}| = \sqrt{3}$, $|\overline{AD}| = 2$ 이고 두 벡터 $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ 가 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\overline{AC} \cdot \overline{AD} = |\overline{AC}| |\overline{AD}| \cos 30^\circ = \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

다른풀이 $|\overline{AC}| = \sqrt{3}$, $|\overline{AD}| = 2$, $|\overline{FE}| = 2 \times 1 = 2$ 이므로

$$|\overline{AC} - \overline{AD}|^2 = |\overline{DC}|^2 = 1$$

$$|\overline{AC}|^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AD} + |\overline{AD}|^2 = 1$$

$$(\sqrt{3})^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AD} + 2^2 = 1$$

$$2\overline{AC} \cdot \overline{AD} = 6 \quad \therefore \overline{AC} \cdot \overline{AD} = 3$$

203 삼각형 ABC의 무게중심이 G이므로

$$\overline{OG} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}}{3} = (3, 4)$$

또, 삼각형 OAC의 무게중심이 H이므로

$$\overline{OH} = \frac{\overline{OA} + \overline{OC}}{3} = (2, 2)$$

$$\therefore \overline{OG} \cdot \overline{OH} = (3, 4) \cdot (2, 2) = 3 \times 2 + 4 \times 2 = 14$$

$$\therefore \cos x^\circ = \frac{\overline{OG} \cdot \overline{OH}}{|\overline{OG}| |\overline{OH}|}$$

$$= \frac{14}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{2^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{14}{10\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

204 두 벡터 $\overline{OA}$ 와 $\overline{OB}$ 가 이루는 각의 크기를 x° ($0^\circ \leq x^\circ \leq 90^\circ$)라 하면

$$\cos x^\circ = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{|\overline{OA}| |\overline{OB}|} = \frac{3}{2 \times 3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x^\circ = 60^\circ$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} |\overline{OA}| |\overline{OB}| \sin 60^\circ$$

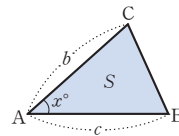
$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

따라서 구하는 평행사변형의 넓이는

$$2\triangle OAB = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

참고 $\triangle ABC$ 에서 두 변의 길이가 b , c 이고 그 끼인 각의 크기가 x° 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} bc \sin x^\circ$$



205 $|\vec{a}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ 이고
두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{a} - t\vec{b}$ 가 서로 수직이므로
 $\vec{a} \cdot (\vec{a} - t\vec{b}) = 0$ 에서
 $|\vec{a}|^2 - t(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 2^2 - t \times 2 = 0$
 $\therefore t = 2$

206 두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 서로 수직이므로
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
 $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$ 에서
 $\vec{a} + 2\vec{b} = -3\vec{c}$
위의 식의 양변을 제곱하면
 $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = 9|\vec{c}|^2$, $|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 9|\vec{c}|^2$
 $3^2 + 4 \times 0 + 4 \times 2^2 = 9x^2$, $25 = 9x^2$, $x^2 = \frac{25}{9}$
 $\therefore x = \frac{5}{3}$ ($\because x \geq 0$)

207 직선 $\frac{x-2}{2} = y-2$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u} = (2, 1)$ 이므로 점 $(2, 3)$ 을 지나고 주어진 직선에 평행한 직선의 방정식은
 $\frac{x-2}{2} = y-3$
위의 식에 $x=0$ 을 대입하면
 $-1 = y-3 \quad \therefore y=2$
따라서 이 직선이 y 축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 2)$ 이므로 $k=2$

208 점 $(6, 3)$ 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (2, 3)$ 에 평행한 직선의 방정식은
 $\frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 에 $y=0$ 을 대입하면 $x=4$ 이므로

A(4, 0)

$\textcircled{1}$ 에 $x=0$ 을 대입하면 $y=-6$ 이므로

B(0, -6)

$$\therefore \overline{AB}^2 = (0-4)^2 + (-6-0)^2 = 52$$

다른풀이 직선이 벡터 $\vec{u} = (2, 3)$ 에 평행하므로 직선의 기울기는 $\frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}$ 이다.

따라서 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이고 점 $(6, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{3}{2}(x-6) + 3 = \frac{3}{2}x - 6$$

- 209** 직선 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2}$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u} = (3, -2)$ 이므로 구하는 직선은 점 $(1, -2)$ 를 지나고 벡터 $\vec{u} = (3, -2)$ 에 수직인 직선이다.
 즉, 구하는 직선의 방정식은
 $3(x-1) - 2(y+2) = 0$
 $3x - 2y - 7 = 0$
 $\therefore \frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y - 1 = 0$ ㉠
 따라서 $a = \frac{3}{7}, b = -\frac{2}{7}$ 이므로
 $a - b = \frac{3}{7} - \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{5}{7}$ ㉡

채점 기준	배점 비율
㉠ 직선의 방정식 구하기	80%
㉡ $a - b$ 의 값 구하기	20%

- 210** 직선 $\frac{x-4}{2} = y-2$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u} = (2, 1)$ 이므로 직선 AH는 점 A(1, 3)을 지나고 벡터 $\vec{u} = (2, 1)$ 에 수직인 직선이다.
 즉, 직선 AH의 방정식은
 $2(x-1) + (y-3) = 0$
 $\therefore 2x + y - 5 = 0$
 $\frac{x-4}{2} = y-2, 2x + y - 5 = 0$ 을 연립하여 풀면
 $x = 2, y = 1$
 $\therefore H(2, 1)$
 따라서 $\vec{AH} = (2, 1) - (1, 3) = (1, -2)$ 이므로
 $a = 1, b = -2 \therefore ab = -2$

- 211** 두 직선 $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{3}, \frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{3}$ 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ 라 하면
 $\vec{u}_1 = (4, 3), \vec{u}_2 = (-1, 3)$
 $\therefore \cos x^\circ = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{|4 \times (-1) + 3 \times 3|}{\sqrt{4^2 + 3^2} \sqrt{(-1)^2 + 3^2}}$
 $= \frac{5}{5\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

- 212** 두 점 A(2, 5), B(6, 2)를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면
 $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (6, 2) - (2, 5) = (4, -3)$
 점 $(-1, 2)$ 를 지나고 벡터 $\vec{a} = (7, 1)$ 에 평행한 직선의 방향벡터는 $\vec{a} = (7, 1)$
 따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기를 x° 라 하면
 $\cos x^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{a}|}{|\vec{u}| |\vec{a}|} = \frac{|4 \times 7 + (-3) \times 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2} \sqrt{7^2 + 1^2}}$
 $= \frac{25}{5 \times 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\therefore x^\circ = 45^\circ$

- 213** (1) 벡터 $\vec{p}$ 의 중점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$ 에서
 $(x-2, y+3) \cdot (x+4, y-3) = 0$
 $(x-2)(x+4) + (y+3)(y-3) = 0$
 $\therefore (x+1)^2 + y^2 = 18$ ㉠
 (2) 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-1, 0)$ 이고 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는
 $\pi \times (3\sqrt{2})^2 = 18\pi$ ㉡

채점 기준	배점 비율
㉠ 점 P가 나타내는 도형의 방정식 구하기	70%
㉡ 점 P가 나타내는 도형의 넓이 구하기	30%

1등급 방법

좌표평면에서 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구할 때에는 다음과 같은 순서로 구한다.

- ① 점 P의 좌표를 (x, y) 로 놓는다.
- ② 주어진 식에 대입하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

- 214** 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}$
 $= (\vec{OA} - \vec{OP}) + (\vec{OB} - \vec{OP}) + (\vec{OC} - \vec{OP})$
 $= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 3\vec{OP}$
 $= (5, -1) + (-2, 6) + (3, 4) - 3(x, y)$
 $= (6 - 3x, 9 - 3y)$
 $|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}| = 9$ 에서
 $\sqrt{(6 - 3x)^2 + (9 - 3y)^2} = 9$
 $(6 - 3x)^2 + (9 - 3y)^2 = 81$
 $\therefore (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$
 따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2, 3)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 도형의 길이는
 $2\pi \times 3 = 6\pi$

실력 완성 1등급 문제

pp. 57~59

215 ①	216 $\frac{13}{18}$	217 ②	218 ③	219 ③
220 ③	221 ③	222 80	223 $\frac{7}{2}$	224 ③
225 7	226 10			

215 선분의 내분점과 외분점의 위치벡터

전략 주어진 식을 변형하여 $\vec{BD}$ 와 $\vec{DC}$ 의 길이의 비를 구한다.

풀이 $\vec{AP} = 2\vec{PD}$ 이므로

$$\vec{PD} = \frac{1}{2}\vec{AP} \quad \dots\dots ㉠$$

$$3\vec{PA} + 4\vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0} \text{에서}$$

$$3\vec{AP} = 4\vec{PB} + 2\vec{PC}$$

위의 식의 양변을 6으로 나누면

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AP} = \frac{4\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}}{6} = \frac{2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{J}, \textcircled{L} \text{에 의하여 } \overrightarrow{PD} = \frac{2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3}$$

따라서 점 D는 선분 BC를 1:2로 내분하는 점이므로

$$\triangle ABD : \triangle ADC = \overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 2$$

참고 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

216 선분의 내분점과 외분점의 위치벡터 + 삼각형의 무게중심의 위치벡터

전략 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ 를 각각 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내어 $\overrightarrow{OG}$ 를 구한다.

$$\text{풀이 } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{b}$$

또, 점 G는 $\triangle PQR$ 의 무게중심이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{17}{36}\vec{b} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } k = \frac{1}{4}, l = \frac{17}{36} \text{ 이므로}$$

$$k+l = \frac{1}{4} + \frac{17}{36} = \frac{13}{18}$$

217 삼각형의 무게중심의 위치벡터

전략 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 원의 중심이 일치함을 알고, 그 원의 중심을 G라 하여 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ 를 $\overrightarrow{OG}$ 로 나타낸다.

풀이 정삼각형 ABC가 원에 내접하므로 정삼각형의 무게중심과 원의 중심은 일치한다.

따라서 정삼각형의 무게중심을 G라 하면 $G(3, 4)$ 이고

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$$

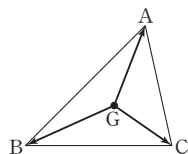
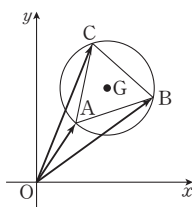
이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \\ &= 3\overrightarrow{OG} \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| &= |3\overrightarrow{OG}| \\ &= 3|\overrightarrow{OG}| \\ &= 3 \times \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 3 \times 5 = 15 \end{aligned}$$

참고 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 라 하면 삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터는 $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

이므로



$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG}) \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OG} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3 \times \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \vec{0} \end{aligned}$$

218 위치벡터와 점이 나타내는 도형

전략 s, t의 조건에 따라 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ 를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형을 구한다.

풀이 ㄱ. 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이다.

ㄴ. $\frac{\overrightarrow{OB}}{2} = \overrightarrow{OB'}$ 이라 하면 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB'이므로 선분 AB의 길이보다 짧다.

ㄷ. $\frac{\overrightarrow{OA}}{2} = \overrightarrow{OA'}$ 이라 하면 점 P가 나타내는 도형은 삼각형 OA'B의 내부와 그 둘레이므로 삼각형 OA'B의 넓이는 삼각형 OAB의 넓이보다 작다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

219 평면벡터의 내적

전략 주어진 포물선에서 세 점 F, F', H의 좌표를 먼저 구한다.

풀이 $y^2 = 4 \times 3 \times x$ 이므로 $F(3, 0), F'(-3, 0)$ 이고

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 $H(-3, b)$ 이므로

$$\overrightarrow{PF} = (3-a, -b), \overrightarrow{PF'} = (-3-a, -b)$$

$$\overrightarrow{PH} = (-3-a, 0)$$

또, 점 P는 포물선 위의 점이므로

$$b^2 = 12a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{PF'} \leq \overrightarrow{PF'} \cdot \overrightarrow{PH} \text{에서}$$

$$(3-a, -b) \cdot (-3-a, -b) \leq (-3-a, -b) \cdot (-3-a, 0)$$

$$-9 + a^2 + b^2 \leq a^2 + 6a + 9, b^2 - 6a \leq 18$$

$$12a - 6a \leq 18 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 3 \quad (\because a \geq 0)$$

즉, 점 P는 오른쪽 그림과 같이 포물선

$y^2 = 12x$ 의 $0 \leq x \leq 3$ 인 부분에 있는 점이다

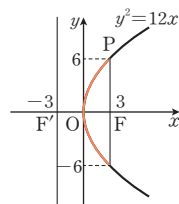
므로 점 P의 좌표가 $(3, 6)$ 또는 $(3, -6)$

일 때 선분 OP의 길이는 최대가 된다.

따라서 구하는 선분 OP의 길이의 최댓

값은

$$\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$



220 평면벡터의 내적 + 두 평면벡터가 이루는 각의 크기와 내적 사이의 관계

전략 벡터의 연산을 이용하여 $\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{DE}$ 를 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 로 나타낸다.

$$\text{풀이 } \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

이때 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 3$ 이고 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore |\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 \\
 &= \left| \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \right) + \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \right) \right|^2 \\
 &= \left| -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right|^2 \\
 &= \frac{25}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 - \frac{10}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2 \\
 &= \frac{25}{9} \times 3^2 - \frac{10}{3} \times \frac{9}{2} + 3^2 = 19
 \end{aligned}$$

221 두 평면벡터가 이루는 각의 크기와 내적 사이의 관계

전략 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 이면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 임을 이용한다.

풀이 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$ 와 $-2\vec{a} + 5\vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-2\vec{a} + 5\vec{b}) = 0$$

$$\therefore -2|\vec{a}|^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 5|\vec{b}|^2 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{또, } |\vec{a}| = 2|\vec{b}| \text{ 이므로 } |\vec{a}|^2 = 4|\vec{b}|^2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$-8|\vec{b}|^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 5|\vec{b}|^2 = 0$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2$$

이때 두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 x° ($0^\circ \leq x^\circ \leq 90^\circ$)라 하면

$$\cos x^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}|^2}{2|\vec{b}| |\vec{b}|} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x^\circ = 60^\circ$$

222 두 평면벡터가 이루는 각의 크기와 내적 사이의 관계

전략 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 x° ($0^\circ \leq x^\circ \leq 90^\circ$)라 하면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos x^\circ$ 임을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림에서 두 벡터 $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AB_n}$ 이 이루는 각의 크기를 x_n° ($0^\circ \leq x_n^\circ \leq 90^\circ$)라 하면

$$|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{AB_n}| \cos x_n^\circ \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB_n}$$

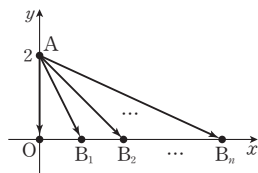
$$= |\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AB_n}| \cos x_n^\circ$$

$$= |\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AO}|$$

$$= |\overrightarrow{AO}|^2$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = |\overrightarrow{AO}|^2 + |\overrightarrow{AO}|^2 + \dots + |\overrightarrow{AO}|^2$$

$$= 20 \times 4 = 80$$



223 평면벡터를 이용한 직선의 방정식

전략 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하고 $|\overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{BP}|^2$ 임을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (x, y) - (-1, 3)$$

$$= (x+1, y-3)$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = (x, y) - (3, 2)$$

$$= (x-3, y-2)$$

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \text{ 에서 } |\overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{BP}|^2 \text{ 이므로}$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\therefore 8x - 2y = 3 \quad \dots\dots ㉠$$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 직선 $8x - 2y = 3$ 이다.

또, 두 점 A(-1, 3), B(3, 2)를 지나는 직선의 방향벡터는 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, 2) - (-1, 3) = (4, -1)$

이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-1} \quad \therefore \frac{x+1}{4} = 3-y \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } x=1, y=\frac{5}{2}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형과 선분 AB의 교점의 좌표는

$$\left(1, \frac{5}{2}\right) \text{ 이므로 } a=1, b=\frac{5}{2}$$

$$\therefore a+b=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$$

224 평면벡터를 이용한 원의 방정식

전략 두 벡터 $\vec{a} = (p, q)$, $\vec{b} = (x, y)$ 로 놓고 점 B가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.

풀이 $\vec{a} = (p, q)$ 라 하면 $|\vec{a}| = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{p^2 + q^2} = 6$ 이므로 $p^2 + q^2 = 36$ ㉠

$$\vec{b} = (x, y) \text{ 라 하면 } \vec{b} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \text{ 에서}$$

$$(x, y) \cdot (x-p, y-q) = 0$$

$$x(x-p) + y(y-q) = 0$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(p^2 + q^2)$$

$$\therefore \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q}{2}\right)^2 = 3^2 \quad (\because ㉠)$$

따라서 점 B가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$ 이고

반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times 3^2 = 9\pi$$

다른풀이 $\vec{b} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$ 에서 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\angle OBA = 90^\circ$ 이므로 점 B가 나타내는 도형은 두 점 O, A를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

이때 $|\vec{a}| = |\overrightarrow{OA}| = 6$ 이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times 3^2 = 9\pi$$

225 평면벡터의 내적 $\oplus$ 두 평면벡터가 이루는 각의 크기와 내적 사이의 관계

[1단계] $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AH}$ 라 하고, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 를 k 로 나타낸다.

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AH} \quad (0 \leq k \leq 1) \text{ 라 하면}$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

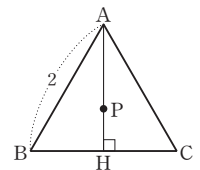
$$= \frac{1}{2}k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}k\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}k|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{2}k|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AB}| \cos 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}k \times 2^2 + \frac{1}{2}k \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 3k$$

[2단계] $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 를 k 로 나타낸다.



$$|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = |k\overrightarrow{AH}|^2 = k^2 |\overrightarrow{AH}|^2 = 3k^2$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP})$$

$$= -\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AP}|^2$$

$$= -3k + 3k^2$$

$$= 3\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

[3단계] $p+q$ 의 값을 구한다.

이때 $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$ 는 $0 \leq k \leq 1$ 에서 $k = \frac{1}{2}$ 일 때 최대이고, 최댓값은 $\left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4}$ 이다.

따라서 $p=4, q=3$ 이므로 $p+q=4+3=7$

다른풀이 오른쪽 그림과 같이 직선

BC가 x 축, 직선 AH가 y 축, 점 H가 원점 O가 되도록 정삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓으면

$A(0, \sqrt{3}), B(-1, 0), C(1, 0)$

선분 AO 위를 움직이는 점 P의 좌

표를 $(0, t)$ ($0 \leq t \leq \sqrt{3}$)라 하면

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (0, \sqrt{3}) - (0, t) = (0, \sqrt{3} - t)$$

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = (-1, 0) - (0, t) = (-1, -t)$$

$$\therefore |\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}| = |-(\sqrt{3}-t)t|$$

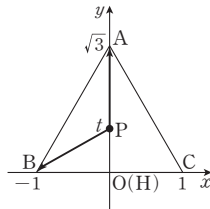
$$= |t^2 - \sqrt{3}t|$$

$$= \left| \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \right|$$

따라서 $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$ 는 $0 \leq t \leq \sqrt{3}$ 에서 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때 최대이고,

최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이므로

$$p+q=4+3=7$$



226 평면벡터의 내적 ⊕ 평면벡터를 이용한 원의 방정식

[1단계] 점 $C(x, y)$ 라 하고 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 를 x, y 에 대한 식으로 나타낸다.

점 C의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (2, 5) - (x, y) = (2-x, 5-y)$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = (4, 3) - (x, y) = (4-x, 3-y)$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \text{에서}$$

$$(2-x)(4-x) + (5-y)(3-y) = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 + y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-4)^2 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, 점 C가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3, 4)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이다.

[2단계] 위치벡터 $\overrightarrow{OC}$ 의 크기의 최댓값과 최솟값을 구한다.

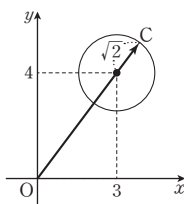
이때 $|\overrightarrow{OC}| = \overrightarrow{OC}$ 이므로 오른쪽 그림

에서 $|\overrightarrow{OC}|$ 의 최댓값은

$$\sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{2} = 5 + \sqrt{2}$$

$|\overrightarrow{OC}|$ 의 최솟값은

$$\sqrt{3^2 + 4^2} - \sqrt{2} = 5 - \sqrt{2}$$



따라서 위치벡터 $\overrightarrow{OC}$ 의 크기의 최댓값과 최솟값의 합은 $(5 + \sqrt{2}) + (5 - \sqrt{2}) = 10$

실전 대비 마무리 문제

pp. 60~61

227 ⑤	228 ①	229 ③	230 $\frac{2}{3}$	231 ④
232 66	233 ⑤	234 ①		

227 벡터의 덧셈과 뺄셈 ⊕ 벡터의 실수배

전략 벡터의 덧셈과 뺄셈, 실수배를 이용하여 $\overrightarrow{EF}$ 를 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 로 나타낸다.

풀이 $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ 이고 $\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{BC} = 3 : 5$ 이므로

$$\overrightarrow{BC} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

또, 변 AB를 1:2로 내분하는 점이 E, 변 DC를 3:1로 내분하는 점이 F이므로

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{AE}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

따라서 $a = \frac{5}{12}, b = \frac{3}{2}$ 이므로 $ab = \frac{5}{8}$

228 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

전략 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 조건을 생각한다.

풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB} \quad (t \neq 0 \text{인 실수})$$

이어야 한다.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 4\vec{a} + m\vec{b} - (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} + (m+1)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b} - (2\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} + 2\vec{b}$$

이므로

$$2\vec{a} + (m+1)\vec{b} = t(-\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$2\vec{a} + (m+1)\vec{b} = -t\vec{a} + 2t\vec{b}$$

이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 서로 평행하지 않으므로

$$2 = -t, m+1 = 2t$$

$$\therefore t = -2, m = -5$$

229 벡터의 덧셈과 뺄셈 ⊕ 선분의 내분점과 외분점의 위치벡터

전략 주어진 조건을 만족시키는 $\square ABDC$ 는 평행사변형임을 알고 선분 AD와 원 O_1 이 만나는 점의 x 좌표를 구한다.

[풀이] $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ 이므로 사각형 ABDC는 평행사변형이다.

이때 $\overrightarrow{AB} = 4$ 이고 $C(a, b)$ 이므로 $D(a+4, b)$

또, 두 원 O_1, O_2 의 방정식은 각각 $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 20$ 이고 두 점 C, D는 각각 원 O_1, O_2 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(a+4)^2 + b^2 = 20 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$8a + 16 = 16 \quad \therefore a = 0$$

$a = 0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b^2 = 4$

$$\therefore b = 2 \quad (\because b > 0) \quad \therefore C(0, 2)$$

따라서 $D(4, 2)$ 이므로 직선 AD의 방정식은

$$y - 0 = \frac{2-0}{4-(-2)}(x+2)$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

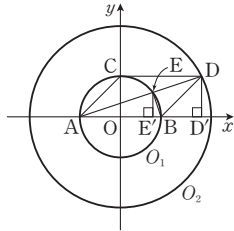
직선 AD와 원 O_1 의 교점 E의 x

$$\text{좌표는 } x^2 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^2 = 4 \text{에서}$$

$$5x^2 + 2x - 16 = 0$$

$$(x+2)(5x-8) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = \frac{8}{5}$$



이때 $A(-2, 0)$ 이므로 점 E의 x좌표는 $\frac{8}{5}$ 이다.

또, 두 점 D, E에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D', E'이라 하면 $\triangle AE'E \sim \triangle AD'D$ 이므로

$$\overrightarrow{AE} : \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE'} : \overrightarrow{AD'}$$

$$= \left(2 + \frac{8}{5}\right) : (2+4) = 3 : 5$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AD}$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{3}{5} \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{3}{5} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5} \overrightarrow{AC}$$

따라서 $p = -\frac{2}{5}, q = \frac{3}{5}$ 이므로

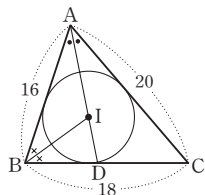
$$p + q = -\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

230 선분의 내분점과 외분점의 위치벡터

[전략] 삼각형의 내심의 성질과 각의 이등분선의 성질을 이용하여 $\overrightarrow{AI}$ 를 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 로 나타낸다.

[풀이] 오른쪽 그림과 같이 선분 AI의 연장선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하면 점 I가 삼각형 ABC의 내접원의 중심이므로

$$\angle BAI = \angle CAI, \angle ABI = \angle DBI$$



$$\text{또, } \overrightarrow{BD} : \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} : \overrightarrow{AC}$$

$$= 16 : 20 = 4 : 5$$

이므로 점 D는 변 BC를 4 : 5로 내분하는 점이다.

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{4\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AB}}{4+5}$$

$$= \frac{5}{9} \overrightarrow{AB} + \frac{4}{9} \overrightarrow{AC}$$

$$\text{한편, } \overrightarrow{BD} = \frac{4}{9} \overrightarrow{BC} = \frac{4}{9} \times 18 = 8 \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{AI} : \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{BA} : \overrightarrow{BD} = 16 : 8 = 2 : 1$$

$$\therefore \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{5}{9} \overrightarrow{AB} + \frac{4}{9} \overrightarrow{AC} \right)$$

$$= \frac{10}{27} \overrightarrow{AB} + \frac{8}{27} \overrightarrow{AC}$$

따라서 $p = \frac{10}{27}, q = \frac{8}{27}$ 이므로

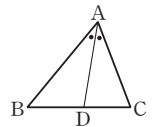
$$p + q = \frac{10}{27} + \frac{8}{27} = \frac{2}{3}$$

[참고] 각의 이등분선의 성질

삼각형 ABC에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변

BC와 만나는 점을 D라 하면

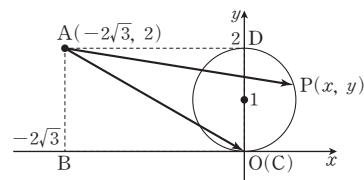
$$\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} : \overrightarrow{CD}$$



231 위치벡터 ⊕ 평면벡터의 내적

[전략] 주어진 그림을 좌표평면에 나타낸 후 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP}$ 를 구한다.

[풀이]



위의 그림과 같이 좌표평면 위에 점 C를 원점, 직선 BC를

x축, 직선 CD를 y축으로 놓으면

$$A(-2\sqrt{3}, 2), B(-2\sqrt{3}, 0), D(0, 2)$$

이므로 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{AC} = (2\sqrt{3}, -2), \overrightarrow{AP} = (x+2\sqrt{3}, y-2)$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} = (2\sqrt{3}, -2) \cdot (x+2\sqrt{3}, y-2)$$

$$= 2\sqrt{3}x - 2y + 16$$

이때 점 P는 원 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 위의 점이므로

$$2\sqrt{3}x - 2y + 16 = k \quad (k \text{는 상수}) \text{라 하면 직선}$$

$$2\sqrt{3}x - 2y + 16 - k = 0 \text{과 원 } x^2 + (y-1)^2 = 1 \text{이 만나야 한다.}$$

즉, 원의 중심 $(0, 1)$ 과 직선 $2\sqrt{3}x - 2y + 16 - k = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1 이하이어야 하므로

$$\frac{|-2+16-k|}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2}} \leq 1$$

$$\frac{|14-k|}{4} \leq 1$$

$$|14-k| \leq 4 \quad \therefore 10 \leq k \leq 18$$

따라서 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP}$ 의 최댓값은 18이다.

232 선분의 내분점과 외분점의 위치벡터 ⊕ 평면벡터의 내적

전략 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ 로 놓고, 선분의 내분점의 위치벡터를 구하는 공식을 이용하여 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG}$ 를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타낸다.

풀이 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ 라 하면

점 D는 $\overline{BC}$ 를 1:4로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB}}{1+4}=\frac{1}{5}(4\vec{a}+\vec{b})$$

점 G는 $\overline{BC}$ 를 4:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AG}=\frac{4\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{4+1}=\frac{1}{5}(\vec{a}+4\vec{b})$$

또, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=10$ 이고 $\angle BAC=60^\circ$ 이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=10\times 10\times \frac{1}{2}=50$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG}&=\frac{1}{5}(4\vec{a}+\vec{b})\cdot\frac{1}{5}(\vec{a}+4\vec{b}) \\&=\frac{1}{25}(4|\vec{a}|^2+17\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2) \\&=\frac{1}{25}(4\times 10^2+17\times 50+4\times 10^2)=66\end{aligned}$$

다른풀이 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 DG의 중점이다.

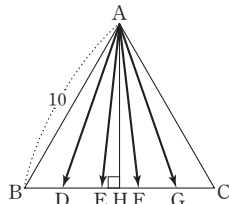
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG} &=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}) \\&=|\overrightarrow{AH}|^2+(\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HG})\cdot\overrightarrow{AH} \\&\quad +\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{HG} \quad \cdots \cdots ㉠\end{aligned}$$

이때 $\overrightarrow{AH}=5\sqrt{3}$, $\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{HG}=\vec{0}$ 이고

$$\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{HG}=-|\overrightarrow{HD}|^2=-3^2=-9$$

따라서 ㉠에서

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG}=(5\sqrt{3})^2+0+(-9)=66$$



233 벡터의 덧셈과 뺄셈 ⊕ 두 평면벡터가 이루는 각의 크기와 내적 사이의 관계

전략 벡터의 연산, 벡터의 내적 등을 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PB}$ 이므로 점 P가 점 A와 일치할 때 $|\overrightarrow{PB}|$ 는 최솟값을 갖는다.

따라서 $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$ 의 최솟값은 $|\overrightarrow{AB}|=1$ 이다.

ㄴ. 오른쪽 그림의 $\triangle ACD$ 에서

$$\overline{AD}=\sqrt{3}, \overline{DC}=1\text{이므로}$$

$$\angle CAD=30^\circ$$

$\triangle EAD$ 가 정삼각형이므로

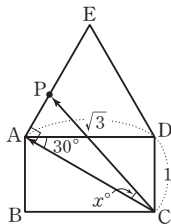
$$\angle EAD=60^\circ$$

$$\therefore \angle PAC=\angle EAC=90^\circ$$

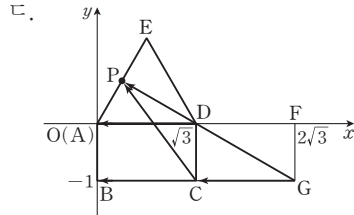
$\angle ACP=x^\circ$ 라 하면 직각삼각형 ACP에서

$$\cos x^\circ=\frac{\overline{CA}}{\overline{CP}}\text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}&=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CP}|\cos x^\circ \\&=\overline{CA}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2 \\&=(\sqrt{3})^2+1^2=4\end{aligned}$$



따라서 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$ 는 일정하다.



위의 그림과 같이 좌표평면 위에 점 A를 원점, 직선 AD를 x 축으로 놓은 후 $\overline{AD}=\overline{DF}$ 가 되도록 x 축 위에서 점 F를 잡고 직사각형 DCGF를 그리면

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GP}$$

이므로 $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$, 즉 $|\overrightarrow{GP}|$ 의 최솟값은

점 $G(2\sqrt{3}, -1)$ 과 직선 AE 사이의 거리와 같다.

이때 직선 AE의 기울기는 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ 이므로 직선 AE의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$, 즉 $\sqrt{3}x-y=0$

따라서 구하는 최솟값은

$$\frac{|\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}+(-1)\times (-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{7}{2}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

다른풀이 ㄴ. $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AP}$ 이므로 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}&=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}) \\&=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AP} \\&=|\overrightarrow{CA}|^2+0=2^2=4\end{aligned}$$

234 평면벡터를 이용한 직선의 방정식 ⊕ 두 직선이 이루는 각의 크기

전략 두 직선 l , m 의 방정식을 구한 후 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ 임을 이용한다.

풀이 직선 l 의 방정식은 $x+3=\frac{y-1}{3}$ 이므로 직선 l 위의

점 P의 좌표는 $(t-3, 3t+1)$ (t 는 실수)로 놓을 수 있고,

직선 m 의 방정식은 $\frac{x-1}{-3}=y-3$ 이므로 직선 m 위의 점 Q

의 좌표는 $(-3s+1, s+3)$ (s 는 실수)으로 놓을 수 있다.

이때 $\angle POQ=90^\circ$ 이므로 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ 에서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}&=(t-3, 3t+1)\cdot(-3s+1, s+3) \\&=10t+10s=0\end{aligned}$$

따라서 $s=-t$ 이므로 점 Q의 좌표는 $(3t+1, -t+3)$

직선 PQ의 방향벡터는

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(3t+1, -t+3)-(t-3, 3t+1) \\&=(2t+4, -4t+2)\end{aligned}$$

직선 AB의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1, 3)-(-3, 1)=(4, 2)$$

$$\begin{aligned}\therefore \cos x^\circ&=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{AB}|} \\&=\frac{|(2t+4, -4t+2)\cdot(4, 2)|}{\sqrt{(2t+4)^2+(-4t+2)^2}\sqrt{4^2+2^2}} \\&=\frac{20}{20\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

따라서 $\cos x^\circ$ 는 $t=0$ 일 때 최댓값을 갖고, 이때 $\overrightarrow{PQ}=(4, 2)$

이므로

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

III

공간도형과 공간좌표

06 공간도형

교과서에서 뽑은 기본 문제

pp. 64~65

- 235** (1) 모서리 BF, 모서리 CG, 모서리 EF, 모서리 HG
(2) 면 BFGC, 면 DHGC
(3) 면 AEHD

236 (1) 90° (2) 45° **237** 7 **238** 45°

239 (1) $6\sqrt{3}$ (2) $\frac{3}{5}$

- 236** (1) 직선 CG와 직선 BF는 평행하고, 두 직선 AB, BF가 이루는 각의 크기는 90° 이다.
따라서 두 직선 AB, CG가 이루는 각의 크기는 90° 이다.
(2) 직선 EF와 직선 AB는 평행하고, 두 직선 AC, AB가 이루는 각의 크기는 45° 이다.
따라서 두 직선 AC, EF가 이루는 각의 크기는 45° 이다.

237 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리 ①에 의하여
 $\overline{PH} \perp \overline{AB}$
 $\triangle POH$ 는 직각삼각형이므로
 $\overline{PH} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
또, $\triangle PHA$ 도 직각삼각형이므로
 $\overline{PA} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 5^2} = 7$

- 238** $\overline{AB} \perp \overline{AD}$, $\overline{AF} \perp \overline{AD}$ 이므로 두 평면 ABCD와 AFGD가 이루는 각의 크기는 두 직선 AB, AF가 이루는 각의 크기와 같다.
따라서 구하는 각의 크기는 $\angle BAF = 45^\circ$

239 (1) $\overline{A'B'} = 12 \times \cos 30^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$
(2) $6 = 10 \times \cos x^\circ$ 에서 $\cos x^\circ = \frac{3}{5}$

유형 분석 기출 문제

pp. 66~71

- | | | | | |
|----------------------------------|---|------------------------------------|---|--------------|
| 240 ② | 241 6 | 242 3 | 243 ③ | 244 ④ |
| 245 ③ | 246 ⑤ | 247 25 | 248 ⑤ | 249 ⑤ |
| 250 4 | 251 ① | 252 $\frac{\sqrt{15}}{3}$ | 253 ② | 254 ① |
| 255 $\frac{\sqrt{10}}{4}$ | 256 ⑤ | 257 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ | 258 45° | 259 ③ |
| 260 ③ | 261 $4\sqrt{3}$ | 262 ④ | 263 (1) 4 (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | |
| 264 ③ | 265 $\frac{15}{4}\pi \text{ cm}^2$ | | | |

- 240** ② 서로 다른 두 직선이 꼬인 위치에 있으면 이 두 직선을 포함하는 평면은 존재하지 않는다.

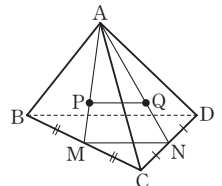
- 241** (i) 세 꼭짓점 B, C, E로 만들 수 있는 평면은 평면 BCE의 1개
(ii) 두 모서리 AB, AD로 만들 수 있는 평면은 평면 ABD의 1개
(iii) 모서리 AB와 꼭짓점 C, E로 만들 수 있는 평면은 평면 ABC, 평면 ABE의 2개
(iv) 모서리 AD와 꼭짓점 C, E로 만들 수 있는 평면은 평면 ADC, 평면 ADE의 2개
(i)~(iv)에서 구하는 서로 다른 평면의 개수는 $1+1+2+2=6$

참고 모서리 AD와 꼭짓점 B로 만들 수 있는 평면은 평면 ABD이고, 이것은 두 모서리 AB, AD로 만들 수 있는 평면과 일치한다.

- 242** 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 AB와 만나지도 않고 평행하지도 않은 모서리이므로 모서리 CD, 모서리 DE, 모서리 CF, 모서리 EF의 4개
 $\therefore a=4$ ㉠
정팔면체는 모든 모서리의 길이가 같으므로
 $\overline{AB} = \overline{BF} = \overline{FD} = \overline{DA}$
즉, $\square ABFD$ 는 마름모이므로 모서리 AB와 평행한 모서리는 모서리 DF의 1개
 $\therefore b=1$ ㉡
 $\therefore a-b=4-1=3$ ㉢

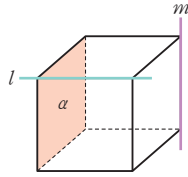
채점 기준	배점 비율
㉠ a의 값 구하기	40%
㉡ b의 값 구하기	40%
㉢ a-b의 값 구하기	20%

- 243** ㄱ. 직선 CD와 직선 BQ는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.
ㄴ. 직선 AD와 직선 BC는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.
ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 의 중점을 각각 M, N이라 하면 두 점 P, Q는 각각 $\overline{AM}$, $\overline{AN}$ 을 2:1로 내분하는 점이므로 $\triangle AMN$ 에서 $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$
 $\triangle BCD$ 에서 $\overline{MN} \parallel \overline{BD}$
 $\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{BD}$
이상에서 두 직선이 꼬인 위치에 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.



- 244** 두 직선 l , m 은 꼬인 위치에 있고, 직선 m 이 평면 α 에 포함되지 않으므로

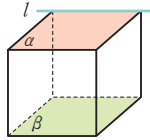
- ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 $l \perp m$ 이고 $m \parallel \alpha$ 이면 $l \perp \alpha$ 일 수도 있다.
 ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 $l \perp \alpha$ 이고 $l \perp m$ 이면 $m \parallel \alpha$ 이다.
 ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $l \perp \alpha$ 이고 $m \parallel \alpha$ 이면 $l \perp m$ 이다.
 이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



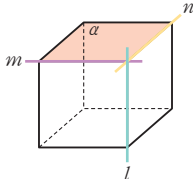
1등급 비법

직선과 평면의 평행 또는 수직 관계를 확인할 때에는 직육면체를 이용하여 직육면체의 모서리를 직선으로, 면을 평면으로 생각하여 위치 관계를 살펴보면 편리하다.

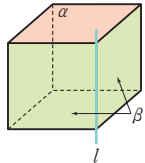
- 245 ① 오른쪽 그림과 같이 $\alpha \parallel \beta$ 이고 직선 l 이 α 에 포함되면 $l \parallel \beta$ 이다.



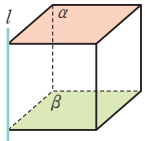
- ② 오른쪽 그림과 같이 α 위에서 만나는 서로 다른 두 직선 m, n 에 대하여 $l \perp m, l \perp n$ 이면 $l \perp \alpha$ 이다.



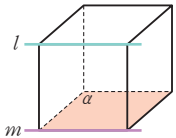
- ③ 오른쪽 그림과 같이 $l \perp \alpha$ 이면 직선 l 을 포함하는 평면은 α 와 수직이므로 l 을 포함하면서 α 와 평행한 β 는 존재할 수 없다.



- ④ 오른쪽 그림과 같이 $\alpha \parallel \beta$ 이면 α 와 한 점에서 만나는 직선 l 은 β 와도 한 점에서 만난다.

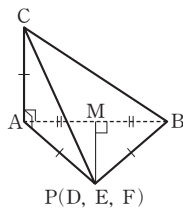


- ⑤ 오른쪽 그림과 같이 $l \parallel m$ 이면 직선 m 을 포함하고 직선 l 을 포함하지 않는 α 에 대하여 $l \parallel \alpha$ 이다.
 따라서 옳지 않은 것은 ③이다.



- 246 주어진 전개도로 사면체를 만들면 오른쪽 그림과 같다.

- ㄱ. $\triangle ACP$ 는 $\overline{AC} = \overline{AP}$, $\angle CAP = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이고, $\overline{AC} = \overline{BP}$ 이므로 $\overline{CP} = \sqrt{2} \overline{AC} = \sqrt{2} \overline{BP}$



- ㄴ. 직선 AB와 직선 CP는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

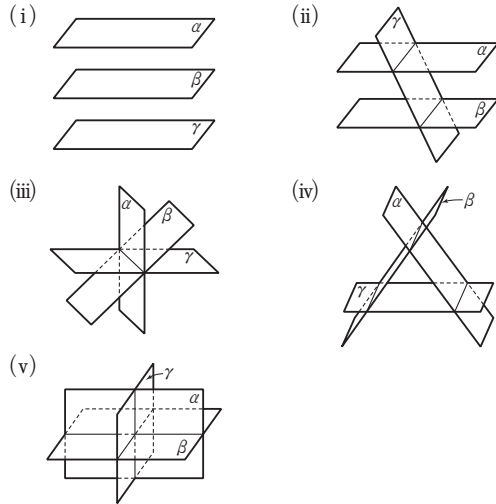
- ㄷ. $\overline{AP} \perp \overline{AC}$, $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ 이므로 $\overline{AC} \perp$ (평면 ABP)
 이때 직선 PM은 평면 ABP 위의 직선이므로 $\overline{AC} \perp \overline{PM}$ ㉠
 한편, $\triangle ABP$ 는 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ ㉡
 ㉠, ㉡에 의하여 $\overline{PM}$ 은 $\overline{AB}$ 와 $\overline{AC}$ 를 포함하는 평면, 즉

평면 ABC와 수직이다.

이때 직선 BC는 평면 ABC 위의 직선이므로 $\overline{PM} \perp \overline{BC}$ 이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

- 247 서로 다른 세 평면 α, β, γ 의 위치 관계는 다음과 같다.



- (i) 세 평면이 평행한 경우
 4개의 부분으로 나누어지므로 $n=4$
 (ii) 세 평면 중 두 평면만 평행한 경우
 6개의 부분으로 나누어지므로 $n=6$
 (iii) 세 평면이 한 직선을 공유하는 경우
 6개의 부분으로 나누어지므로 $n=6$
 (iv) 세 평면 중 두 평면끼리 만나고 세 교선이 평행한 경우
 7개의 부분으로 나누어지므로 $n=7$
 (v) 세 평면이 한 점을 공유하고, 세 교선이 한 점에서 만나는 경우
 8개의 부분으로 나누어지므로 $n=8$ ㉠
 (i)~(v)에서 n 의 값이 될 수 있는 것은 4, 6, 7, 8이므로
 구하는 합은 $4+6+7+8=25$ ㉡

채점 기준	배점 비율
㉠ 세 평면 α, β, γ 의 위치 관계에 따른 n 의 값 구하기	80%
㉡ 모든 n 의 값의 합 구하기	20%

- 248 $\overline{CF} \parallel \overline{DE}$ 이므로 직선 EG와 직선 CF

가 이루는 각의 크기는 직선 EG와 직선 DE가 이루는 각의 크기와 같다.

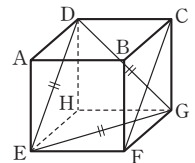
이때 $\overline{EG} = \overline{DE} = \overline{DG}$ 이므로 $\triangle DEG$ 는 정삼각형이다.

따라서 직선 EG와 직선 DE가 이루는 각의 크기는 60° 이므로 $\alpha = 60^\circ$

또, $\overline{BF} \parallel \overline{AE}$ 이므로 직선 EG와 직선 BF가 이루는 각의 크기는 직선 EG와 직선 AE가 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore \beta = 90^\circ$

$\therefore \alpha + \beta = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$



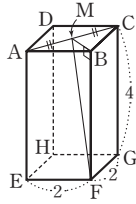
249 $\overline{CG} \parallel \overline{BF}$ 이므로 $x^\circ = \angle BFM$

$$\text{이때 } \overline{BF} = 4, \overline{BM} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2}$$

이므로 직각삼각형 BMF에서

$$\overline{MF} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \cos x^\circ = \frac{\overline{BF}}{\overline{MF}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



250 $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여

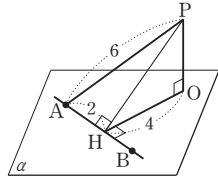
$$\overline{PH} \perp \overline{AB}$$

따라서 $\triangle PAH$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{PH} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

또, $\triangle PHO$ 도 직각삼각형이므로

$$\overline{OP} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 4^2} = 4$$



251 선분 AB의 중점을 M이라 하

면 $\triangle PAB$ 는 정삼각형이므로

$$\overline{PM} \perp \overline{AB}$$
이고

$$\overline{PM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

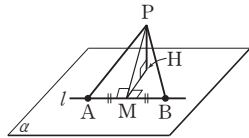
이때 $\overline{PH} \perp \alpha, \overline{PM} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HM} \perp \overline{AB}$$

즉, 점 H와 직선 l 사이의 거리는 $\overline{HM}$ 의 길이와 같다.

이때 $\triangle PHM$ 은 직각삼각형이므로

$$\overline{HM} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 4^2} = \sqrt{11}$$



252 $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{DK} \perp \overline{EG}$ 이

므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HK} \perp \overline{EG}$$

$\angle GHE = 90^\circ$ 이므로 $\triangle HEG$ 의 넓

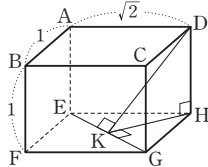
이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{EH} \times \overline{HG} = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{HK}$$

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \overline{HK} \quad \therefore \overline{HK} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \dots \text{㉑}$$

$\triangle DHK$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{DK} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{3} \quad \dots \text{㉒}$$



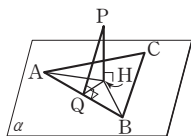
채점 기준	배점 비율
㉑ 삼수선의 정리를 이용하여 $\overline{HK} \perp \overline{EG}$ 임을 알기	30%
㉑ $\overline{HK}$ 의 길이 구하기	50%
㉒ $\overline{DK}$ 의 길이 구하기	20%

253 $\overline{PH} \perp \alpha, \overline{PQ} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정

리에 의하여

$$\overline{HQ} \perp \overline{AB}$$

이때 $\triangle ABC$ 의 넓이가 24이고, 점 H가 $\triangle ABC$ 의 무게중심이므로 $\triangle ABH$ 의 넓이에서



$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{HQ} = \frac{1}{3} \times 24$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \overline{HQ} = 8 \quad \therefore \overline{HQ} = 2$$

이때 $\triangle PQH$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

254 $\overline{BC}$ 의 중점을 M이라 하면

$\triangle ABC, \triangle BCD$ 는 정삼각형이므로

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}, \overline{DM} \perp \overline{BC}$$

평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의

크기는 두 직선 AM, DM이

이루는 각의 크기와 같으므로

$$x^\circ = \angle AMD$$

$\triangle ABC$ 와 $\triangle DBC$ 는 합동이므로

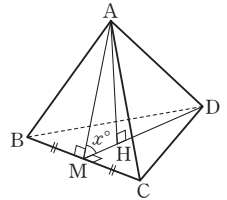
$$\overline{AM} = \overline{DM}$$

꼭짓점 A에서 $\triangle BCD$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 $\triangle BCD$ 의 무게중심이므로

$$\overline{HM} = \frac{1}{3} \overline{DM} = \frac{1}{3} \overline{AM}$$

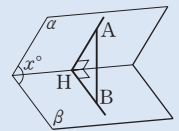
따라서 직각삼각형 AHM에서

$$\cos x^\circ = \frac{\overline{HM}}{\overline{AM}} = \frac{\frac{1}{3} \overline{AM}}{\overline{AM}} = \frac{1}{3}$$



1등급 방법

두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기를 x° 라 하면 x° 는 두 평면 α, β 의 교선 위의 한 점 H에서 교선과 수직으로 각 평면에 그은 두 직선이 이루는 각의 크기와 같다. 즉, $x^\circ = \angle AHB$



255 $\overline{BC}$ 의 중점을 M이라 하면

$\triangle ABC, \triangle DBC$ 는 이등변삼각형이므로

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}, \overline{DM} \perp \overline{BC}$$

평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의

크기는 두 직선 AM, DM이 이루는 각의

크기와 같으므로

$$x^\circ = \angle AMD$$

$\overline{BM} = 3$ 이므로 직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AM} = \sqrt{7^2 - 3^2} = 2\sqrt{10}$$

직각삼각형 DBM에서

$$\overline{DM} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

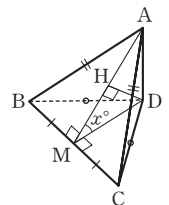
이때 $\overline{AD} = \overline{DM} = 4$ 이므로 $\triangle AMD$ 는 $\overline{AD} = \overline{DM}$ 인 이등변삼각형이다.

즉, 꼭짓점 D에서 $\overline{AM}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{MH} = \overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AM} = \sqrt{10} \quad \dots \text{㉑}$$

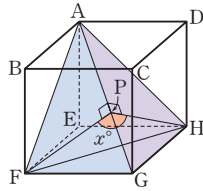
따라서 직각삼각형 DHM에서

$$\cos x^\circ = \frac{\overline{MH}}{\overline{DM}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \quad \dots \text{㉒}$$



채점 기준	배점 비율
㉠ x° 가 $\angle AMD$ 의 크기와 같음을 알기	40%
㉡ $\overline{MH}$ 의 길이 구하기	40%
㉢ $\cos x^\circ$ 의 값 구하기	20%

- 256** 두 꼭짓점 F, H에서 각각 $\overline{AG}$ 에 내린 수선의 발을 P라 하면 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기는 두 직선 FP, HP가 이루는 각의 크기와 같으므로



$$x^\circ = \angle FPH$$

정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{AF} = \overline{AH} = \overline{FH} = \sqrt{2}a, \overline{AG} = \sqrt{3}a$$

$\angle AFG = 90^\circ$ 이므로 $\triangle AFG$ 의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{AF} \times \overline{FG} = \frac{1}{2} \times \overline{AG} \times \overline{FP}$$

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2}a \times a = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}a \times \overline{FP}$$

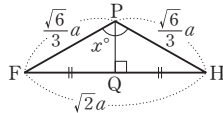
$$\therefore \overline{FP} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

같은 방법으로 하면 $\triangle AHG$ 의 넓이에서

$$\overline{PH} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$\triangle FPH$ 는 이등변삼각형이므로 점

P에서 $\overline{FH}$ 에 내린 수선의 발을 Q라 하면



$$\angle FPQ = \angle HPQ = \frac{x^\circ}{2}$$

$$\overline{FQ} = \overline{HQ} = \frac{1}{2}\overline{FH} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

이때 직각삼각형 PFQ에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$

$$\therefore \cos \frac{x^\circ}{2} = \cos (\angle FPQ) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{FP}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}a}{\frac{\sqrt{6}}{3}a} = \frac{1}{2}$$

- 257** 직선 l 위의 한 점 A에서 교선 XY에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 B에서 직선 m 에 내린 수선의 발을 C라 하면

$$\overline{AB} \perp \beta, \overline{BC} \perp m$$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

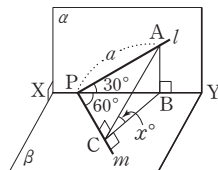
$$\overline{AC} \perp m$$

두 직선 l, m 에 의하여 결정되는 평면과 평면 β 가 이루는 각의 크기는 두 직선 AC, BC가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$x^\circ = \angle ACB$$

이때 $\overline{AP} = a$ 라 하면 직각삼각형 APB에서

$$\overline{PB} = a \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



직각삼각형 BPC에서

$$\overline{PC} = \overline{PB} \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a,$$

$$\overline{BC} = \overline{PB} \sin 60^\circ = \frac{3}{4}a$$

직각삼각형 APC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}a$$

따라서 직각삼각형 ACB에서

$$\cos x^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{3}{4}a}{\frac{\sqrt{13}}{4}a} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

- 258** 꼭짓점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H, 직선 AB와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 x° 라 하면

$$x^\circ = \angle ABH$$

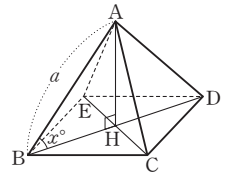
점 H는 정사각형 BCDE의 대각선

의 교점이므로 $\overline{AB} = a$ 라 하면

$$\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

직삼각형 ABH에서

$$\cos x^\circ = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore x^\circ = 45^\circ$$

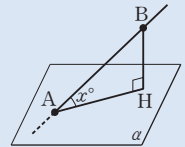


1등급 비법

직선 AB와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 x° , 점 B에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\textcircled{1} x^\circ = \angle BAH$$

$$\textcircled{2} \sin x^\circ = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}, \cos x^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$$



- 259** 오른쪽 그림에서

$$\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

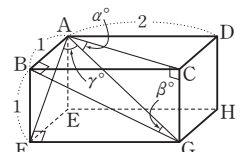
$$\overline{BG} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\overline{AF} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\overline{AG} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \text{이므로}$$

$$\cos \alpha^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \cos \beta^\circ = \frac{\overline{BG}}{\overline{AG}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \cos \gamma^\circ = \frac{\overline{AF}}{\overline{AG}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore \cos^2 \alpha^\circ + \cos^2 \beta^\circ + \cos^2 \gamma^\circ = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = 2$$



- 260** $\overline{MN} \perp \overline{BC}$, $\overline{DN} \perp \overline{BC}$ 이므로 점 M

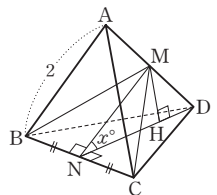
에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 ND 위

에 있고, 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{MH} \perp$ (평면 BCD)

선분 MN과 밑면 BCD가 이루는

각의 크기를 x° 라 하면

$$x^\circ = \angle MND$$



$\triangle DBC$ 는 정삼각형이므로

$$\overline{ND} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

또, $\overline{MD} = 1$ 이므로 직각삼각형 MND 에서

$$\overline{MN} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \cos x^\circ = \frac{\overline{MN}}{\overline{ND}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 선분 MN 의 밑면 BCD 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{MN} \cos x^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- 261** 타원의 장축의 길이를 $2a$ 라 하면 장축의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 지름이므로

$$4 = 2a \times \cos 60^\circ$$

$$\therefore a = \frac{4}{2 \cos 60^\circ} = 4 \quad \dots\dots ㉠$$

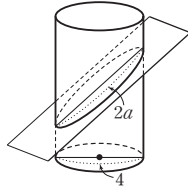
또, 타원의 단축의 길이를 $2b$ 라 하면

$$2b = 4 \quad \therefore b = 2 \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$2 \times \sqrt{4^2 - 2^2} = 4\sqrt{3} \quad \dots\dots ㉢$$

채점 기준	배점 비율
㉠ 타원의 장축의 길이를 $2a$ 라 하고 a 의 값 구하기	40%
㉡ 타원의 단축의 길이를 $2b$ 라 하고 b 의 값 구하기	30%
㉢ 타원의 두 초점 사이의 거리 구하기	30%



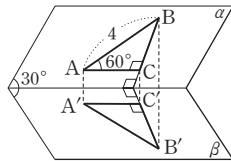
- 262** 점 B 에서 점 A 를 지나고 α, β 의 교선과 평행한 직선에 내린 수선의 발을 C , 점 C 의 평면 β 위로의 정사영을 C' 이라 하면 직각삼각형 ABC 의 평면 β 위로의 정사영은 직각삼각형 $A'B'C'$ 이므로

$$\overline{A'C'} = \overline{AC} = \overline{AB} \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\begin{aligned} \overline{B'C'} &= \overline{BC} \cos 30^\circ = 4 \sin 60^\circ \times \cos 30^\circ \\ &= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \end{aligned}$$

따라서 직각삼각형 $A'B'C'$ 에서

$$\overline{A'B'} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$



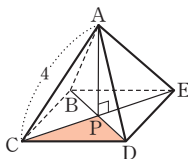
- 263** (1) 정사각형 $BCDE$ 의 두 대각선의 교점 P 라 하면 삼각형 ACD 의 평면 $BCDE$ 위로의 정사영은 삼각형 PCD 이므로 구하는 넓이는

$$\triangle PCD = \frac{1}{4} \square BCDE$$

$$= \frac{1}{4} \times 4^2 = 4 \quad \dots\dots ㉠$$

- (2) 삼각형 ACD 는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$$\triangle ACD = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3} \quad \dots\dots ㉡$$



$$\therefore \cos x^\circ = \frac{\triangle PCD}{\triangle ACD} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots\dots ㉢$$

채점 기준	배점 비율
㉠ $\triangle ACD$ 의 평면 $BCDE$ 위로의 정사영의 넓이 구하기	40%
㉡ $\triangle ACD$ 의 넓이 구하기	30%
㉢ $\cos x^\circ$ 의 값 구하기	30%

1등급 방법

평면 α 위에 있는 도형 F 와 이 도형의 평면 β 위로의 정사영 F' 의 넓이를 각각 S, S' 이라 하고, 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기를 $x^\circ (0^\circ \leq x^\circ \leq 90^\circ)$ 라 하면

$$S' = S \cos x^\circ \Rightarrow \cos x^\circ = \frac{S'}{S}$$

- 264** 반구를 밑면과 이루는 각의 크기가

30° 인 평면으로 자른 단면은 원이다. 이때 $\overline{BC}$ 가 단면의 지름이 되도록 점 C 를 잡고 점 O 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직각삼각형 OBH 에서

$$\overline{BH} = 4 \times \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

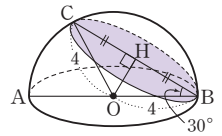
이때 $\triangle OBC$ 는 이등변삼각형이므로 $\overline{BH} = \overline{CH}$

즉, $\overline{BH}$ 는 단면의 반지름이므로 단면의 넓이는

$$\pi \times (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$12\pi \times \cos 30^\circ = 12\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\pi$$



- 265** 컵을 기울이기 전의 물이 컵의 모선과 만나는 점을 각각 A, B , 컵을 최대한 기울였을 때의 물이 컵의 모선과 만나는 점을 각각 C, D 라 하고, 컵의 밑면의 지름의 다른 한 끝 점을 E 라 하자.

컵을 기울이면 한쪽 수면이 올라간 만큼 반대쪽 수면이 내려가므로

$$\overline{AC} = \overline{BD} = 2 \text{ cm}$$

즉, $\overline{DE} = 4 \text{ cm}$ 이므로 직각삼각형 CDE 에서

$$\overline{CD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 (\text{cm})$$

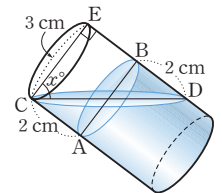
또, $\angle DCE = x^\circ$ 라 하면

$$\cos x^\circ = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{3}{5}$$

이때 컵의 밑면의 넓이는 $\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\pi (\text{cm}^2)$ 이므로 구하는 수면의 넓이를 S 라 하면

$$S \cos x^\circ = \frac{9}{4}\pi$$

$$\therefore S = \frac{\frac{9}{4}\pi}{\cos x^\circ} = \frac{\frac{9}{4}\pi}{\frac{3}{5}} = \frac{15}{4}\pi (\text{cm}^2)$$



266 1	267 ①	268 1	269 ③	270 ⑤
271 $\sqrt{6}$	272 $\frac{\sqrt{65}}{13}$	273 $\frac{3\sqrt{11}}{11}$	274 $6\sqrt{5}m$	275 54

266 위치 관계

전략 공간에서 서로 다른 두 평면이 평행하지 않고 만날 때, 1개의 교선이 생김을 이용한다.

풀이 $m+n=5$ 에서 $n=5-m$ 이고, $(5-m)$ 개의 평면은 m 개의 평면과 만나 각각 m 개의 교선이 생긴다.

즉, $(5-m)$ 개의 평면과 m 개의 평면이 만나서 생기는 교선의 개수는 $m(5-m)$ 이다.

또, $(5-m)$ 개의 평면끼리 만나서 생기는 교선의 개수는

$${}_{5-m}C_2 = \frac{(5-m)(4-m)}{2}$$

이때 교선의 개수가 7이므로

$$m(5-m) + \frac{(5-m)(4-m)}{2} = 7$$

$$m^2 - m - 6 = 0, (m+2)(m-3) = 0$$

$$\therefore m=3 (\because m>0)$$

따라서 $n=5-m=5-3=2$ 이므로

$$m-n=3-2=1$$

1등급 방법

- ① m 개의 평행한 평면이 이와 평행하지 않은 1개의 평면과 만나서 생기는 교선의 개수는 m 이다.
- ② 어느 세 평면의 교선도 일치하지 않고, 어느 두 평면도 평행하지 않은 n 개의 평면이 만나서 생기는 교선의 개수는 ${}_nC_2$ 이다.

267 직선과 평면의 평행과 수직

전략 사면체를 자른 단면은 평행사변형이므로 삼각형에서 평행선에 의하여 생기는 선분의 길이의 비를 이용하여 사각형의 둘레의 길이를 구한다.

풀이 네 모서리 AB, BC, CD, DA와 이 사면체를 자른 평면의 교점을 각각 P, Q, R, S라 하면 두 선분 PQ, SR는 모두 모서리 AC에 평행하고, 두 선분 PS, QR는 모두 모서리 BD에 평행하므로 □PQRS는 평행사변형이다.

$\overline{AP} : \overline{BP} = m : n (m>0, n>0)$ 으로 놓으면

$\triangle BQP \sim \triangle BCA$ 이므로

$$\overline{PQ} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{BA}, \overline{PQ} : 2 = n : (m+n)$$

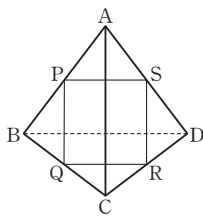
$$\therefore \overline{PQ} = \frac{2n}{m+n}$$

또, $\triangle APS \sim \triangle ABD$ 이므로

$$\overline{PS} : \overline{BD} = \overline{AP} : \overline{AB}, \overline{PS} : 2 = m : (m+n)$$

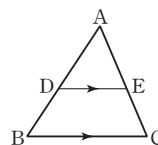
$$\therefore \overline{PS} = \frac{2m}{m+n}$$

따라서 구하는 둘레의 길이는



$$2(\overline{PQ} + \overline{PS}) = 2\left(\frac{2n}{m+n} + \frac{2m}{m+n}\right) = 4 \times \frac{m+n}{m+n} = 4$$

참고 $\triangle ABC$ 에서 두 점 D, E가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위의 점이고 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 일 때,
 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{BC}$



1등급 방법

모서리 AC에 평행한 평면으로 평면 ABC를 자르면 그 교선은 모서리 AC에 평행하다.

268 두 직선이 이루는 각

전략 합동인 정육면체를 붙여서 직선 DG와 평행인 직선을 찾아 x° 를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 합동인 두 정육면체를 붙여 놓으면 $\overline{DG} \parallel \overline{HI}$ 이므로 두 직선 BH, DG가 이루는 각의 크기는 두 직선 BH, HI가 이루는 각의 크기와 같다.

즉, $x^\circ = \angle BHI$

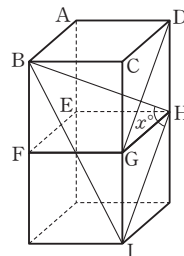
정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{HI} = \sqrt{2}a, \overline{BH} = \sqrt{3}a, \overline{BI} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$$

이때 $\triangle BHI$ 에서 $\overline{BH}^2 + \overline{HI}^2 = \overline{BI}^2$ 이 성립하므로

$$x^\circ = \angle BHI = 90^\circ$$

$$\therefore \sin x^\circ = \sin 90^\circ = 1$$



269 삼수선의 정리

전략 $\overline{AH} \perp (\text{평면 BCD}), \overline{AQ} \perp \overline{CM}$ 이므로 삼수선의 정리를 이용한다.

풀이 $\overline{AH} \perp (\text{평면 BCD}),$

$\overline{AQ} \perp \overline{CM}$ 이므로 삼수선의 정리에 의

하여

$$\overline{HQ} \perp \overline{CM}$$

평면 BCD에서

$\triangle BCH = k (k \neq 0 \text{인 상수})$ 라 하면

$$\triangle CDH = 3k, \triangle DBH = 2k$$

이때 $\triangle BCD$ 는 한 변의 길이가 12인 정삼각형이므로 $\triangle BCD$ 의 넓이에서

$$k + 3k + 2k = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2$$

$$\therefore k = 6\sqrt{3}$$

즉, $\triangle BCH = 6\sqrt{3}, \triangle CDH = 18\sqrt{3}, \triangle DBH = 12\sqrt{3}$ 이므로

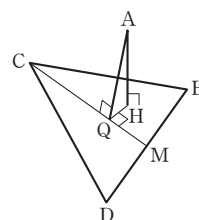
$$\triangle BCM = \triangle BCH + \triangle CMH + \triangle MBH$$

$$= 6\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times \overline{CM} \times \overline{HQ} + \frac{1}{2} \times \triangle DBH$$

$$= 6\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 12\right) \times \overline{HQ} + \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3}$$

$$= 12\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \overline{HQ}$$

이때 $\triangle BCM$ 의 넓이는 $\triangle BCD$ 의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로



$$12\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \overline{HQ} = \frac{1}{2} \times 36\sqrt{3}$$

$$3\sqrt{3} \overline{HQ} = 6\sqrt{3} \quad \therefore \overline{HQ} = 2$$

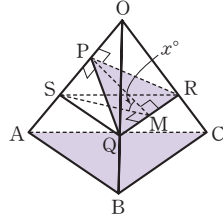
따라서 직각삼각형 AQH에서

$$\overline{AQ} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

270 이면각

전략 $\overline{QR}$ 를 지나면서 $\triangle ABC$ 와 평행한 평면이 $\triangle PQR$ 과 이루는 각의 크기가 x° 임을 이용한다.

풀이 정사면체의 모서리 OA 를 2:1로 내분하는 점을 S 라 하면 두 평면 ABC , SQR 는 평행하므로 평면 PQR 과 평면 ABC 가 이루는 각의 크기 x° 는 두 평면 PQR 과 SQR 가 이루는 각의 크기와 같다.



$\overline{QR}$ 의 중점을 M 이라 하면 $\overline{SM} \perp \overline{QR}$, $\overline{PM} \perp \overline{QR}$ 이므로 $x^\circ = \angle PMS$

또, 점 P 는 $\overline{OS}$ 의 중점이므로 $\overline{OS} \perp \overline{QP}$, $\overline{OS} \perp \overline{RP}$ 이다.

즉, $\overline{OS} \perp (\text{평면 } PQR)$ 이므로 $\overline{OS} \perp \overline{PM}$

$\overline{OA} = 3a$ 라 하면

$$\overline{SQ} = \frac{2}{3} \times 3a = 2a, \overline{PS} = a, \overline{QM} = a$$

직각삼각형 SQM에서

$$\overline{SM} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

직각삼각형 PSM에서

$$\overline{PM} = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 - a^2} = \sqrt{2}a$$

따라서 직각삼각형 PSM에서

$$\cos x^\circ = \frac{\overline{PM}}{\overline{SM}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

271 직선과 평면이 이루는 각

전략 $\overline{PQ}$ 의 길이가 최소가 되는 경우는 $\overline{PQ} \perp \overline{BD}$, $\overline{PQ} \perp \overline{AG}$ 일 때임을 이용하여 점 P 의 위치를 찾는다.

풀이 $\overline{CG} \perp (\text{평면 } BCD)$ 이므로

$\overline{BD} \perp \overline{CG}$ 이고, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ 이므로

$\overline{BD} \perp (\text{평면 } AGC)$

$\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 교점이 P , 점 P 에서

$\overline{AG}$ 에 내린 수선의 발이 Q 이면

$\overline{PQ} \perp \overline{BD}$, $\overline{PQ} \perp \overline{AG}$ 이고, 이때 $\overline{PQ}$ 의 길이가 최소가 된다.

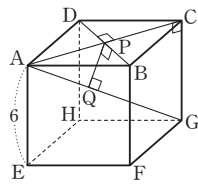
$\triangle CAG$ 에서 $\angle CAG = x^\circ$ 라 하면

$$\sin x^\circ = \frac{\overline{CG}}{\overline{AG}} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

즉, $\triangle APQ$ 에서

$$\overline{PQ} = \overline{AP} \sin x^\circ = \frac{6\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{6}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{6}$ 이다.



272 정사영의 길이

전략 선분 AB 의 평면 α 위로의 정사영을 선분 $A'B'$ 이라 하고, 직선 AB 와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 x° 라 하면 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos x^\circ$ 임을 이용한다.

풀이 두 점 A, P 의 평면 $BCDE$ 위로의 정사영을 각각 A', P' 이라 하면 $\overline{PM}$ 의 정사영은 $\overline{P'M}$ 이므로

$$\overline{P'M} = \overline{PM} \cos x^\circ \quad \therefore \cos x^\circ = \frac{\overline{P'M}}{\overline{PM}}$$

정팔면체의 한 모서리의 길이를

$6a$ 라 하면

$$\overline{BM} = 3a,$$

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6a = 3\sqrt{3}a,$$

$$\overline{A'M} = \frac{1}{2} \times 6a = 3a$$

직각삼각형 $AA'M$ 에서

$$\overline{AA'} = \sqrt{(3\sqrt{3}a)^2 - (3a)^2} = 3\sqrt{2}a$$

점 P 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 Q 라 하면

$\overline{PQ} \parallel \overline{AM}$ 이므로

$\triangle BQP \sim \triangle BMA$

$\overline{PQ} : \overline{AM} = \overline{BP} : \overline{BA} = 2 : 3$ 에서

$$\overline{PQ} = \frac{2}{3} \overline{AM} = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3}a = 2\sqrt{3}a$$

$\overline{BM} : \overline{QM} = \overline{BA} : \overline{PA} = 3 : 1$ 에서

$$\overline{QM} = \frac{1}{3} \overline{BM} = \frac{1}{3} \times 3a = a$$

직각삼각형 PQM에서

$$\overline{PM} = \sqrt{(2\sqrt{3}a)^2 + a^2} = \sqrt{13}a$$

또, $\triangle BP'P \sim \triangle BA'A$ 이므로

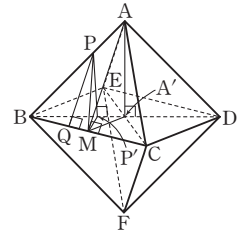
$\overline{PP'} : \overline{AA'} = \overline{BP} : \overline{BA} = 2 : 3$ 에서

$$\overline{PP'} = \frac{2}{3} \overline{AA'} = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}a$$

따라서 직각삼각형 PMP'에서

$$\overline{P'M} = \sqrt{(\sqrt{13}a)^2 - (2\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{5}a$$

$$\therefore \cos x^\circ = \frac{\overline{P'M}}{\overline{PM}} = \frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{13}a} = \frac{\sqrt{65}}{13}$$



273 정사영의 넓이

전략 $\triangle PQR$ 의 평면 $CGHD$ 위로의 정사영은 $\triangle DCG$ 임을 이용한다.

풀이 점 Q 에서 $\overline{AD}$ 에 내린 수선의 발을

Q' 이라 하면 직각삼각형 PQQ' 에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

같은 방법으로 $\overline{QR} = \sqrt{10}$

따라서 $\triangle PQR$ 가 이등변삼각형이므로

점 Q 에서 $\overline{PR}$ 에 내린 수선의 발을 H' 이라 하면

$$\overline{RH'} = \frac{1}{2} \overline{PR} = \frac{1}{2} \overline{DG} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

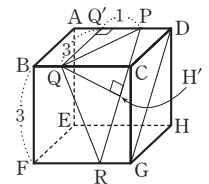
직각삼각형 QRH'에서

$$\overline{QH'} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{22}}{2}$$

$$\therefore \triangle PQR = \frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{QH'} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{22}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2}$$

이때 $\triangle PQR$ 의 평면 $CGHD$ 위로의 정사영이 $\triangle DCG$ 이므로

$$\frac{3\sqrt{11}}{2} \times \cos x^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \quad \therefore \cos x^\circ = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$



274 삼수선의 정리

[1단계] 삼수선의 정리를 이용한다.

선분 AB가 원의 지름이므로

$$\angle BCA = 90^\circ \quad \therefore \overline{AC} \perp \overline{BC}$$

이때 $\overline{PA} \perp$ (평면 ABC)이므로 삼수선의 정리에 의하여

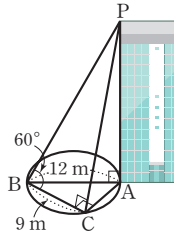
$$\overline{PC} \perp \overline{BC}$$

[2단계] $\triangle PBC$ 와 $\triangle PBA$ 에서 각각 $\overline{PB}$, $\overline{PA}$ 의 길이를 구한다.

$$\text{직각삼각형 PBC에서 } \overline{PB} = \frac{9}{\cos 60^\circ} = 18(\text{m})$$

$$\text{직각삼각형 PBA에서 } \overline{PA} = \sqrt{18^2 - 12^2} = 6\sqrt{5}(\text{m})$$

따라서 건물의 높이는 $6\sqrt{5}$ m이다.



275 정사영의 넓이

[1단계] 평면 β 에 나타나는 그림자에 해당하는 철판의 영역을 찾아 넓이를 구한다.

평면 β 위에 있는 정삼각형의 꼭짓점을 A, 평면 α 위에 있는 정삼각형의 꼭짓점을 각각 B, C라 하고, 점 A에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 D라 하면 $\triangle ABC$ 에서

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8\sqrt{3} = 12$$

두 점 A, D에서 두 평면 α , β 의 교선 l 에 내린 수선의 발을 O, 점 O에서 $\overline{AD}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 태양 광선이 평면 α 와 30° 의 각을 이루면서 철판의 면에 수직으로 비추므로

$$\angle DOH = 30^\circ, \angle HDO = 60^\circ$$

직각삼각형 ADO에서

$$\overline{OD} = 12 \cos 60^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

직각삼각형 DOH에서

$$\overline{DH} = \overline{OD} \cos 60^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

따라서 평면 β 에 나타나는 그림자는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 그림자이다.

점 H를 지나고 $\overline{BC}$ 에 평행한 직선을 그어 철판과 만나는 점을 각각 P, Q라 하면

$$\overline{AH} : \overline{AD} = 9 : 12 = 3 : 4 \text{ 이므로 } \overline{PQ} : \overline{BC} = 3 : 4$$

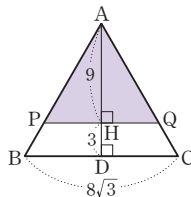
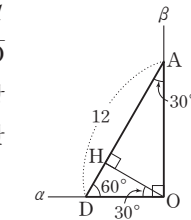
$$\therefore \overline{PQ} = \frac{3}{4} \overline{BC} = \frac{3}{4} \times 8\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle APQ = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 9 = 27\sqrt{3}$$

[2단계] 평면 β 에 나타나는 철판의 그림자의 넓이를 구한다.

철판의 면과 평면 β 사이의 각의 크기는 30° 이므로 구하는 그림자의 넓이를 S라 하면 $S \cos 30^\circ = 27\sqrt{3}$ 에서

$$S = \frac{27\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = \frac{27\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 54$$



07 공간좌표

교과서에서 뽑은 기출 문제

pp. 74~75

$$276 \text{ (1) } (0, 0, 4) \text{ (2) } (2, -3, 0) \text{ (3) } (2, -3, 4)$$

$$277 \text{ (1) } (3, 0, 0), (0, 5, 0), (0, 0, -2)$$

$$\text{(2) } (3, 5, 0), (0, 5, -2), (3, 0, -2)$$

$$278 \text{ (1) } (-1, 3, -4) \text{ (2) } (1, 3, 4) \text{ (3) } (1, -3, 4) \text{ (4) } (-1, 3, 4)$$

$$279 \text{ (1) } \sqrt{14} \text{ (2) } 5\sqrt{2}$$

$$280 \text{ (1) } \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -3\right) \text{ (2) } (3, 6, -15) \text{ (3) } \left(\frac{3}{2}, 3, -\frac{3}{2}\right)$$

$$281 \text{ (1) } x^2 + y^2 + z^2 = 5 \text{ (2) } (x-5)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

$$279 \text{ (1) } \overline{OA} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\text{(2) } \overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-4-1)^2 + \{2-(-2)\}^2} = 5\sqrt{2}$$

$$280 \text{ (1) } \left(\frac{2 \times 2 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times (-6) + 1 \times 3}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -3\right)$$

$$\text{(2) } \left(\frac{2 \times 2 - 1 \times 1}{2-1}, \frac{2 \times 4 - 1 \times 2}{2-1}, \frac{2 \times (-6) - 1 \times 3}{2-1}\right)$$

$$\therefore (3, 6, -15)$$

$$\text{(3) } \left(\frac{1+2}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{3-6}{2}\right) \therefore \left(\frac{3}{2}, 3, -\frac{3}{2}\right)$$

유형 분석 기출 문제

pp. 76~82

$$282 \text{ ⑤} \quad 283 \text{ ④} \quad 284 \text{ ①} \quad 285 \text{ (0, 0, 9)} \quad 286 \text{ 13}$$

$$287 \text{ ③} \quad 288 \text{ ③} \quad 289 \text{ (1) } 5\sqrt{5} \text{ (2) } 10 \text{ (3) } \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$290 \text{ ⑤} \quad 291 \frac{\sqrt{10}}{10} \quad 292 \text{ 10} \quad 293 \text{ ①} \quad 294 \text{ ④}$$

$$295 \text{ ⑤} \quad 296 \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right) \quad 297 \text{ ③}$$

$$298 \left(\frac{26}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{32}{3}\right) \quad 299 \text{ 3} \quad 300 \text{ ②} \quad 301 \text{ ③}$$

$$302 \text{ 3} \quad 303 \text{ ④} \quad 304 \text{ 8} \quad 305 \text{ ④} \quad 306 \frac{243}{2}\pi$$

$$307 \text{ ②} \quad 308 \text{ ⑤} \quad 309 \text{ 10} \quad 310 \text{ ②} \quad 311 \text{ ②}$$

$$312 \text{ (1) } 4 \text{ (2) } \frac{24}{5}\pi \quad 313 \text{ ①} \quad 314 \text{ ③}$$

282 점 C의 x 좌표, y 좌표는 각각 점 G의 x 좌표, y 좌표와 같으므로

$$a=4, b=6$$

점 C의 z 좌표는 점 A의 z 좌표와 같으므로

$$c=3$$

$$\therefore abc = 4 \times 6 \times 3 = 72$$

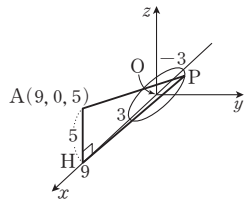
- 283** 점 A(2, 3, 1)에서 xy 평면에 내린 수선의 발은 z 좌표가 0이므로 점 P의 좌표는
 (2, 3, 0)
 점 P를 y 축에 대하여 대칭이동한 점은 x 좌표, z 좌표의 부호가 모두 바뀌므로 점 Q의 좌표는
 (-2, 3, 0)
 따라서 $a=-2$, $b=3$, $c=0$ 이므로
 $a+b+c=-2+3+0=1$

- 284** A(3, 3, 2), B(0, 0, 2)이므로
 $AB=\sqrt{(0-3)^2+(0-3)^2+(2-2)^2}=3\sqrt{2}$

- 285** z 축 위에 있는 점 P의 좌표를 (0, 0, a)라 하면
 $AP^2=(0-2)^2+(0-1)^2+(a-1)^2$
 $=a^2-2a+6$
 $BP^2=\{0-(-2)\}^2+(0-4)^2+(a-2)^2$
 $=a^2-4a+24$ ㉠
 $AP=BP$ 에서 $AP^2=BP^2$ 이므로
 $a^2-2a+6=a^2-4a+24$
 $2a=18 \quad \therefore a=9$ ㉡
 따라서 점 P의 좌표는 (0, 0, 9)이다. ㉢

채점 기준	배점 비율
㉠ AP^2, BP^2 을 식으로 나타내기	40%
㉡ $AP^2=BP^2$ 임을 이용하여 a 의 값 구하기	40%
㉢ 점 P의 좌표 구하기	20%

- 286** 점 A(9, 0, 5)에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면
 H(9, 0, 0)
 이때 $AH \perp (xy\text{평면})$ 이므로
 $AH \perp HP$
 직각삼각형 AHP에서
 $AP=\sqrt{AH^2+HP^2}=\sqrt{5^2+HP^2}$
 따라서 HP가 최대일 때 AP가 최대이고, 점 H가 x 축 위의 점이므로 HP가 최대가 되는 것은 점 P가 타원 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 의 장축 위의 점인 (-3, 0, 0)일 때이다.
 이때 $HP=\sqrt{(-3-9)^2}=12$ 이므로 AP의 최댓값은
 $AP=\sqrt{5^2+12^2}=13$



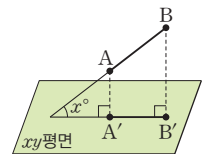
- 287** 두 점 A, B의 y 좌표의 부호가 반대이므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 zx 평면을 기준으로 서로 반대쪽에 있다.
 이때 $AP+PB$ 의 최솟값은 AB 의 길이와 같으므로
 $AB=\sqrt{(3-2)^2+(-1-1)^2+(-2-1)^2}$
 $=\sqrt{14}$

1등급 방법

- 어느 좌표평면 위의 점 P에 대하여 두 점 A, B가 그 좌표평면을 기준으로 서로 반대쪽에 있는 경우
 $\Rightarrow (AP+PB\text{의 최솟값})=(AB\text{의 길이})$
- 어느 좌표축 위의 점 P에 대하여 두 점 A, B가 그 좌표축을 기준으로 같은 쪽에 있는 경우
 $\Rightarrow$ 점 A를 좌표축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면
 $(AP+PB\text{의 최솟값})=(A'B\text{의 길이})$
- 어느 좌표평면 위의 점 P에 대하여 두 점 A, B가 그 좌표평면을 기준으로 같은 쪽에 있는 경우
 $\Rightarrow$ 점 A를 좌표평면에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면
 $(AP+PB\text{의 최솟값})=(A'B\text{의 길이})$

- 288** 두 점 A, B의 z 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 xy 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.
 점 A를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면
 $A'(-1, 1, 1)$
 이때 $AP+PB$ 의 최솟값은 $A'B$ 의 길이와 같으므로
 $\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(a-1)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{38}$
 양변을 제곱하여 정리하면
 $a^2-2a-3=0, (a+1)(a-3)=0$
 $\therefore a=3 (\because a>0)$

- 289** (1) $AB=\sqrt{(-1-7)^2+(-4-2)^2+(6-1)^2}$
 $=5\sqrt{5}$ ㉠
 (2) 두 점 A, B에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하면
 $A'(7, 2, 0), B'(-1, -4, 0)$
 AB 의 xy 평면 위로의 정사영은 $A'B'$ 이므로 구하는 길이는
 $A'B'=\sqrt{(-1-7)^2+(-4-2)^2}=10$ ㉡
 (3) $AB \cos x^\circ=A'B'$ 이므로
 $\cos x^\circ=\frac{A'B'}{AB}=\frac{10}{5\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ㉢



채점 기준	배점 비율
㉠ AB의 길이 구하기	20%
㉡ 정사영의 길이 구하기	50%
㉢ $\cos x^\circ$ 의 값 구하기	30%

1등급 방법

- 직선 AB가 좌표평면과 이루는 예각의 크기가 x° 일 때 $\cos x^\circ$ 의 값을 구하는 순서는 다음과 같다.
 ① 두 점 A, B에서 좌표평면에 내린 수선의 발 A', B'의 좌표를 구한다.
 ② AB의 좌표평면 위로의 정사영인 $A'B'$ 의 길이를 구한다.
 ③ $A'B'=AB \cos x^\circ$ 에서 $\cos x^\circ=\frac{A'B'}{AB}$ 임을 이용한다.

- 290** 두 점 A, B에서 zx 평면에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하면 $A'(3, 0, 5), B'(-1, 0, 2)$
 $\therefore A'B'=\sqrt{(-1-3)^2+(2-5)^2}=5$

$$\overline{AB} \cos 45^\circ = \overline{A'B'} \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{A'B'}}{\cos 45^\circ} = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5\sqrt{2}$$

즉, $\sqrt{(-1-3)^2 + (a-1)^2 + (2-5)^2} = 5\sqrt{2}$ 이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 2a - 24 = 0, (a+4)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = 6 (\because a > 0)$$

291 $\overline{AB} = \sqrt{(0-\sqrt{2})^2 + (3-4)^2 + (4-1)^2} = 2\sqrt{3},$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{10},$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(\sqrt{2}-0)^2 + (4-4)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2}$$

에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각 삼각형이다.

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{2} = \sqrt{5}$$

세 점 A, B, C에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C' 이라 하면

$$A'(\sqrt{2}, 4, 0), B'(0, 3, 0), C'(0, 4, 0)$$

이때

$$\overline{A'B'} = \sqrt{(0-\sqrt{2})^2 + (3-4)^2} = \sqrt{3},$$

$$\overline{B'C'} = \sqrt{(4-3)^2} = 1,$$

$$\overline{C'A'} = \sqrt{(\sqrt{2}-0)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{2}$$

에서 $\overline{A'B'}^2 = \overline{B'C'}^2 + \overline{C'A'}^2$ 이므로 $\triangle A'B'C'$ 도 $\angle C' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\therefore \triangle A'B'C' = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $\triangle A'B'C' = \triangle ABC \times \cos x^\circ$ 이므로

$$\cos x^\circ = \frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

292 점 Q의 좌표는 (3, 4, 5)

선분 PQ를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표가 (a, b, c)이므로

$$a = \frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1} = 1, b = \frac{2 \times 4 + 1 \times 4}{2+1} = 4,$$

$$c = \frac{2 \times 5 + 1 \times 5}{2+1} = 5$$

$$\therefore a+b+c = 1+4+5 = 10$$

293 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점이 x 축 위에 있으므로 외분 점의 y 좌표와 z 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{3 \times 2 - 2 \times a}{3-2} = 0, \frac{3 \times b - 2 \times (-6)}{3-2} = 0 \text{에서}$$

$$6 - 2a = 0, 3b + 12 = 0$$

따라서 $a = 3, b = -4$ 이므로

$$a+b = 3 + (-4) = -1$$

294 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점이 yz 평면 위에 있으므로 내분점의 x 좌표는 0이다.

$$\text{즉, } \frac{m \times (-4) + n \times 5}{m+n} = 0 \text{에서 } -4m + 5n = 0$$

$$4m = 5n \quad \therefore \frac{n}{m} = \frac{4}{5}$$

295 선분 OB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+a}{2}, \frac{0+b}{2}, \frac{0+c}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2} \right)$$

선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{2+3}{2}, \frac{3+(-4)}{2} \right), \text{ 즉 } \left(0, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

사각형 OABC가 평행사변형이므로 대각선 OB의 중점과 대각선 AC의 중점이 일치한다.

$$\text{즉, } \frac{a}{2} = 0, \frac{b}{2} = \frac{5}{2}, \frac{c}{2} = -\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$a = 0, b = 5, c = -1$$

$$\therefore a+b+c = 0+5+(-1) = 4$$

296 $\overline{AB} = \sqrt{(0-3)^2 + \{1-(-3)\}^2 + (3-3)^2} = 5$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + \{-1-(-3)\}^2 + (1-3)^2} = 3 \quad \dots\dots ㉑$$

삼각형의 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD} \text{이므로}$$

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 5 : 3 \quad \dots\dots ㉒$$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$ 를 5 : 3으로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{5 \times 2 + 3 \times 0}{5+3}, \frac{5 \times (-1) + 3 \times 1}{5+3}, \frac{5 \times 1 + 3 \times 3}{5+3} \right)$$

$$\text{즉, } \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{7}{4} \right) \quad \dots\dots ㉓$$

채점 기준	배점 비율
㉑ $\overline{AB}, \overline{AC}$ 의 길이 구하기	20%
㉒ $\overline{BD} : \overline{CD}$ 구하기	40%
㉓ 점 D의 좌표 구하기	40%

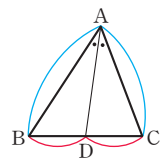
개념 보충

삼각형의 각의 이등분선의 성질

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선과 $\overline{BC}$ 의 교점

을 D라 하면

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$



297 점 C의 좌표를 (x, y, z)라 하면 $\triangle ABC$ 의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-1)+x}{3}, \frac{1+3+y}{3}, \frac{-4+6+z}{3} \right)$$

이고 (3, 1, -1)과 일치해야 하므로

$$\frac{1+x}{3} = 3, \frac{4+y}{3} = 1, \frac{2+z}{3} = -1$$

$$\therefore x = 8, y = -1, z = -5$$

따라서 점 C의 좌표는 (8, -1, -5)

298 점 P는 선분 AB의 중점이므로

$$P\left(\frac{6+4}{2}, \frac{1+(-5)}{2}, \frac{-4+2}{2}\right)$$

$$\therefore P(5, -2, -1) \quad \dots\dots ㉓$$

점 Q는 선분 BC를 2 : 3으로 내분하는 점이므로

$$Q\left(\frac{2 \times 9 + 3 \times 4}{2+3}, \frac{2 \times 0 + 3 \times (-5)}{2+3}, \frac{2 \times 7 + 3 \times 2}{2+3}\right)$$

$$\therefore Q(6, -3, 4) \quad \dots\dots ㉔$$

점 R는 선분 AC를 3 : 2로 외분하는 점이므로

$$R\left(\frac{3 \times 9 - 2 \times 6}{3-2}, \frac{3 \times 0 - 2 \times 1}{3-2}, \frac{3 \times 7 - 2 \times (-4)}{3-2}\right)$$

$$\therefore R(15, -2, 29) \quad \dots\dots ㉕$$

따라서 $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{5+6+15}{3}, \frac{-2+(-3)+(-2)}{3}, \frac{-1+4+29}{3}\right)$$

$$\text{즉, } \left(\frac{26}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{32}{3}\right) \quad \dots\dots ㉖$$

채점 기준	배점 비율
㉓ 점 P의 좌표 구하기	25%
㉔ 점 Q의 좌표 구하기	25%
㉕ 점 R의 좌표 구하기	25%
㉖ $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표 구하기	25%

299 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 이라 하고,

주어진 네 점의 좌표를 차례로 대입하면

$$D=0, 4A+D=-16, 3A-B+D=-10,$$

$$4A-4C+D=-32$$

위의 네 식을 연립하여 풀면

$$A=-4, B=-2, C=4, D=0$$

즉, 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z=0$ 이므로

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$$

따라서 구의 반지름의 길이는 3이다.

300 $x^2+y^2+z^2+4x+6y-2z+10=0$ 에서

$$(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=4$$

즉, 구의 중심의 좌표는 $(-2, -3, 1)$ 이고 주어진 두 점을

이온 선분의 중점이 구의 중심과 일치하므로

$$\frac{2+a}{2}=-2, \frac{1+b}{2}=-3, \frac{-1+c}{2}=1$$

$$\therefore a=-6, b=-7, c=3$$

$$\therefore a+b+c=-6+(-7)+3=-10$$

301 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 1 - 2 \times 0}{1-2}, \frac{1 \times 3 - 2 \times 5}{1-2}, \frac{1 \times (-4) - 2 \times (-2)}{1-2}\right)$$

$$\text{즉, } (-1, 7, 0)$$

두 점 B, P를 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{3+7}{2}, \frac{(-4)+0}{2}\right), \text{ 즉 } (0, 5, -2)$$

구의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}BP$ 와 같으므로

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-1-1)^2+(7-3)^2+\{0-(-4)\}^2}=\frac{1}{2} \times 6=3$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2+(y-5)^2+(z+2)^2=9$$

302 $x^2+y^2+z^2+2ax+6y-10z+18=0$ 에서

$$(x+a)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=a^2+16$$

이 구가 xy 평면에 접하려면 구의 중심에서 xy 평면에 이르는 거리와 반지름의 길이가 같아야 한다.

즉, 구의 중심 $(-a, -3, 5)$ 에서 xy 평면에 내린 수선의 발의 좌표가 $(-a, -3, 0)$ 이므로

$$|5|=\sqrt{a^2+16}, 5^2=a^2+16, a^2=9$$

$$\therefore a=3 (\because a>0)$$

303 구가 x 축, y 축, z 축에 동시에 접하므로 구의 중심 (a, b, c)

에서 x 축, y 축, z 축에 이르는 거리가 모두 같다.

따라서 $|a|=|b|=|c|$ 이므로 $a^2=b^2=c^2$

구의 중심에서 x 축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(a, 0, 0)$ 이고 구의 반지름의 길이가 10이므로

$$\sqrt{b^2+c^2}=10, 2b^2=100 (\because b^2=c^2) \quad \therefore b^2=50$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=3 \times 50=150$$

304 점 A와 구의 중심이 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 대하여 각각

같은 영역에 존재해야 하므로 구의 중심의 좌표를 (a, b, c) 라 하면

$$a<0, b>0, c>0$$

이때 구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구는 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 모두 접하므로

$$|a|=|b|=|c|=r$$

$$\therefore a=-r, b=r, c=r$$

구의 방정식은

$$(x+r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2 \quad \dots\dots ㉗$$

㉗이 점 A $(-3, 1, 4)$ 를 지나므로

$$(-3+r)^2+(1-r)^2+(4-r)^2=r^2$$

$$r^2-8r+13=0$$

$$\therefore r=4 \pm \sqrt{3}$$

따라서 두 구의 반지름의 길이의 합은

$$(4+\sqrt{3})+(4-\sqrt{3})=8$$

305 점 B의 좌표를 (a, b, c) 라 하면

점 B는 구 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$ 위의 점이므로

$$(a-1)^2+(b+2)^2+c^2=4 \quad \dots\dots ㉘$$

선분 AB의 중점을 P (x, y, z) 라 하면

$$x=\frac{1+a}{2}, y=\frac{2+b}{2}, z=\frac{-4+c}{2}$$

$$\therefore a=2x-1, b=2y-2, c=2z+4 \quad \dots\dots ㉙$$

㉙을 ㉘에 대입하면

$$(2x-2)^2+(2y)^2+(2z+4)^2=4$$

$$\therefore (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=1$$

306 원에서 지름에 대한 원주각의 크기는 90° 이므로 $\angle ABC = 90^\circ$ 를 만족시키는 점 B는 선분 AC를 지름으로 하는 구 위에 있다. ㉠

이때 $\overline{AC} = \sqrt{\{4 - (-2)\}^2 + \{3 - 0\}^2 + \{-1 - 5\}^2} = 9$ 이므로 구의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} = \frac{9}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

따라서 점 B가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{9}{2}$ 인 구이므로 그 부피는

$$\frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{9}{2}\right)^3 = \frac{243}{2} \pi \quad \dots\dots ㉢$$

채점 기준	배점 비율
㉠ 점 B가 나타내는 도형이 구임을 알기	30%
㉡ 구의 반지름의 길이 구하기	40%
㉢ 구의 부피 구하기	30%

307 yz 평면 위의 점은 x 좌표가 0이므로 $x=0$ 을 주어진 구의 방정식에 대입하여 정리하면

$$(y-3)^2 + (z+2)^2 = 24$$

따라서 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 도형은 중심의 좌표가 $(0, 3, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ 인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}\pi$$

다른풀이 오른쪽 그림과 같이 주어진 구의 중심을 C라 하고 점 C에서 yz 평면에 내린 수선의 발을 H, 구와 yz 평면의 한 교점을 A라 하면

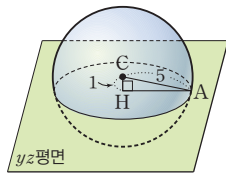
$$C(-1, 3, -2), H(0, 3, -2)$$

$$\text{이고 } \overline{AC} = 5, \overline{CH} = 1 \text{이므로}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$$

따라서 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $2\sqrt{6}$ 인 원이므로 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}\pi$$



308 구의 중심의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 169$$

xy 평면 위의 점은 z 좌표가 0이므로 $z=0$ 을 구의 방정식에 대입하여 정리하면

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 169 - c^2$$

즉, 주어진 구와 xy 평면의 교선은 반지름의 길이가 $\sqrt{169 - c^2}$ 인 원이므로 $\sqrt{169 - c^2} = 5$ 에서 $169 - c^2 = 25$

$$c^2 = 144 \quad \therefore c = 12 \quad (\because c > 0)$$

따라서 구하는 z 좌표는 12이다.

309 y 축 위의 점은 x 좌표와 z 좌표가 모두 0이므로 $x=0, z=0$ 을 주어진 구의 방정식에 대입하면

$$y^2 + 2y - 24 = 0, (y+6)(y-4) = 0$$

$$\therefore y = -6 \text{ 또는 } y = 4$$

따라서 주어진 구와 y 축의 교점 A, B의 좌표는

$$(0, -6, 0), (0, 4, 0)$$

이므로 선분 AB의 길이는 $|4 - (-6)| = 10$

$$\text{다른풀이 } x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 6z - 24 = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 38$$

오른쪽 그림과 같이 주어진 구의 중심을 C라 하고 점 C에서 y 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$C(-2, -1, 3)$$

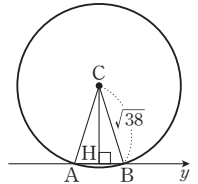
$$H(0, -1, 0)$$

$$\therefore \overline{CH} = \sqrt{\{0 - (-2)\}^2 + \{-1 - (-1)\}^2 + \{0 - 3\}^2} = \sqrt{13}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{38} \text{이므로 직각삼각형 BCH에서}$$

$$\overline{BH} = \sqrt{(\sqrt{38})^2 - (\sqrt{13})^2} = 5$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{BH} = 2 \times 5 = 10$$



310 x 축 위의 점은 y 좌표와 z 좌표가 모두 0이므로 $y=0, z=0$ 을 주어진 구의 방정식에 대입하여 정리하면

$$x^2 - 6x + 35 - r^2 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

주어진 구와 x 축이 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로 x 에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근의 차가 8이다.

따라서 ㉠의 두 근을 $\alpha, \alpha+8$ 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha+8) = 6, \alpha(\alpha+8) = 35 - r^2$$

$$\text{이므로 } \alpha = -1, r^2 = 42$$

$$\therefore r = \sqrt{42} \quad (\because r > 0)$$

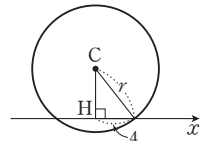
다른풀이 주어진 구의 중심을 C라 하고 점 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$C(3, -5, 1), H(3, 0, 0)$$

$$\therefore \overline{CH} = \sqrt{\{3 - 3\}^2 + \{0 - (-5)\}^2 + \{0 - 1\}^2}$$

$$= \sqrt{26}$$

$$\therefore r = \sqrt{(\sqrt{26})^2 + 4^2} = \sqrt{42}$$



311 중심을 C라 하면 $C(2, -5, 3)$ 이므로

$$\overline{CA} = \sqrt{(2-5)^2 + (-5-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{74}$$

이때 $\overline{AB} = 8$ 이고 $\triangle ACB$ 는

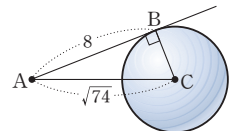
$\angle CBA = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{74})^2 - 8^2} = \sqrt{10}$$

따라서 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 구의 겹넓이는

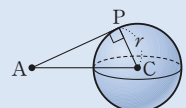
$$4\pi \times (\sqrt{10})^2 = 40\pi$$



1등급 방법

구 밖의 한 점 A에서 중심이 C이고 반지름의 길이가 r 인 구에 그은 접선의 접점을 P라 할 때,

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{\overline{AC}^2 - r^2}$$



- 312 (1) 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 의 중심을 O라 하면 $O(0, 0, 0)$ 이고 반지름의 길이는 3이므로

$$\overline{OP}=3,$$

$$\overline{OA}=\sqrt{2^2+(-3)^2+(2\sqrt{3})^2}=5$$

이때 $\triangle OPA$ 는 $\angle OPA=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

- (2) 점 P에서 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P가 나타내는 도형은 $\overline{PH}$ 를 반지름으로 하는 원이다.

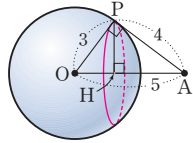
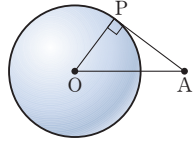
직각삼각형 OPA의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{PA} = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{PH}$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{PH} \quad \therefore \overline{PH} = \frac{12}{5}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{12}{5}$ 인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5}\pi$$



채점 기준	배점 비율
㉠ AP의 길이 구하기	40%
㉡ 점 P가 나타내는 도형이 원임을 알고 반지름의 길이 구하기	40%
㉢ 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이 구하기	20%

- 313 주어진 구의 중심을 C라 하면

$$C(3, -1, 0)$$

점 P가 $\overline{CQ}$ 와 구가 만나는 점의 위

치에 있을 때 $\overline{PQ}$ 의 길이가 최소가 된다.

따라서 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은

$$\overline{CQ} - \overline{CP} = \sqrt{(6-3)^2 + \{3-(-1)\}^2 + (4-0)^2} - 1 = \sqrt{41} - 1$$



- 314 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 는 중심의 좌표가 $(0, 0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 2이다.

$$\text{또, } x^2+y^2+z^2-4x+10y-6z+29=0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=9$$

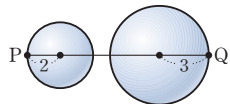
이므로 이 구는 중심의 좌표가 $(2, -5, 3)$ 이고 반지름의 길이가 3이다.

오른쪽 그림과 같을 때 두 점 P,

Q 사이의 거리가 최대이므로

구하는 최댓값은

$$\sqrt{2^2+(-5)^2+3^2}+(2+3)=\sqrt{38}+5$$



1등급 방법

중심이 각각 C, C'이고 반지름의 길이가 각각 r, r'인 만나지 않는 두 구 위의 점 P, P'에 대하여

$$\overline{CC'} - (r+r') \leq \overline{PP'} \leq \overline{CC'} + (r+r')$$

$$\Rightarrow \overline{PP'} \text{의 최댓값: } \overline{CC'} + (r+r'),$$

$$\overline{PP'} \text{의 최솟값: } \overline{CC'} - (r+r')$$

실력 완성 1등급 문제

pp. 83~85

315 ⑤	316 ②	317 ⑤	318 ④	319 ⑤
320 ②	321 ⑤	322 ②	323 ②	324 ⑤
325 ②	326 ④			

- 315 좌표공간에서의 점의 좌표 ④ 두 점 사이의 거리

전략 평면으로 잘린 입체도형의 단면은 평행사변형임을 이용하여 네 점 A, B, C, D의 좌표를 구한다.

풀이 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ 이므로 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

꼭짓점 E를 원점, 모서리 EF, EH, EA가 각각 x축, y축, z축의 양의 방향과 일치하도록 입체도형을 좌표공간에 놓으면

$A(0, 0, 2)$, $B(1, 0, 3)$, $C(1, 1, 5)$, $D(0, 1, 4)$ 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{1^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(-1)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{2}$$

$$\overline{DA} = \sqrt{1^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$$

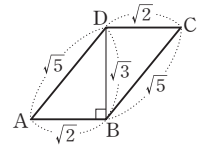
$$\overline{BD} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (4-3)^2} = \sqrt{3}$$

이때 $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$ 이므로

$$\overline{AB} \perp \overline{BD}$$

따라서 사각형 ABCD는 밑변의 길이가 $\sqrt{2}$, 높이가 $\sqrt{3}$ 인 평행사변형이므로 구하는 넓이는

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$



- 316 두 점 사이의 거리

전략 $\triangle ABC$ 의 넓이를 a, b에 대한 식으로 나타낸 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\triangle ABC$ 의 넓이의 최솟값을 구한다.

풀이 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + a^2 + (-b)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + a^2 + b^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-b)^2 + (b-a)^2 + a^2} = \sqrt{(a-b)^2 + a^2 + b^2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{a^2 + (-b)^2 + (b-a)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + a^2 + b^2}$$

즉, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 한 변의 길이가

$$\sqrt{(a-b)^2 + a^2 + b^2}$$
인 정삼각형이다.

$$\therefore \triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \{\sqrt{(a-b)^2 + a^2 + b^2}\}^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \{2(a^2 + b^2) - 2ab\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (8 - 2ab) (\because a^2 + b^2 = 4)$$

$\triangle ABC$ 의 넓이가 최소하려면 ab의 값이 최대이어야 한다.

이때 $a > 0$, $b > 0$ 이고 $a^2 + b^2 = 4$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} \quad (\text{단, 등호는 } a^2 = b^2, \text{ 즉 } a = b \text{ 일 때 성립})$$

$$4 \geq 2ab \quad \therefore ab \leq 2$$

따라서 $ab=2$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이가 최소가 되므로 구하는 최솟값은

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (8 - 2 \times 2) = \sqrt{3}$$

317 두 점 사이의 거리

전략 세 점 A, B, C와 평면 α 의 위치 관계를 생각한다.

풀이 조건 (가), (나)에서 두 점 A, B는 평면 α 를 기준으로 같은 쪽에 있고 점 C는 반대쪽에 있다.

ㄱ. 평면 α 와 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 교선을 l 이라 하자.

점 A와 평면 α 사이의 거리가 $d(\alpha)$ 일 때, 점 A에서 평면 α 와 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하면

$$\overline{AH_1} \leq \overline{AH_2}, \text{ 즉 } d(\alpha) \leq \overline{AH_2}$$

따라서 $d(\alpha)$ 는 평면 α 와 세 점 A, B, C를 지나는 평면이 수직일 때 최대이다.

마찬가지로 두 점 B, C와 평면 α 사이의 거리가 $d(\alpha)$ 인 경우에도 $d(\alpha)$ 는 평면 α 와 세 점 A, B, C를 지나는 평면이 수직일 때 최대이므로 평면 β 는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직이다.

ㄴ. (i) $\overline{AC} \leq \overline{BC}$ 일 때,

선분 AC의 중점을 M이라 하면 평면 α 가 점 M을 지날 때 $d(\alpha)$ 는 최대이다. 즉, 평면 β 는 선분 AC의 중점을 지난다.

(ii) $\overline{BC} \leq \overline{AC}$ 일 때,

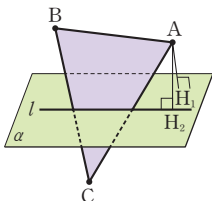
(i)과 마찬가지로 평면 β 는 선분 BC의 중점을 지난다.

(i), (ii)에서 평면 β 는 선분 AC의 중점 또는 선분 BC의 중점을 지난다.

ㄷ. $\overline{AC} = |-1-3| = 4, \overline{BC} = \sqrt{2^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$ 에서 $\overline{BC} \leq \overline{AC}$ 이므로 평면 β 는 선분 BC의 중점을 지난다.

따라서 $d(\beta)$ 는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

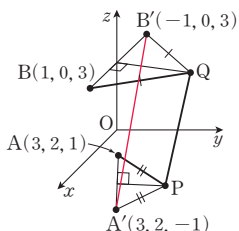


318 선분의 길이의 합의 최솟값

전략 두 점 A, B를 각각 xy 평면, yz 평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하고, $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값과 길이가 같은 선분을 찾는다.

풀이 두 점 A, B는 xy 평면, yz 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A(3, 2, 1)을 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 B(1, 0, 3)을 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 A'(3, 2, -1), B'(-1, 0, 3)



$$\therefore \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \geq \overline{A'B'}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B'}$ 의 길이와 같으므로 $\overline{A'B'} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2)^2 + \{3-(-1)\}^2} = 6$

319 공간좌표와 정사영

전략 $\triangle ABC$ 가 직각삼각형을 알고, $\triangle ABC$ 와 $\triangle PBH$ 가 서로 닮음을 이용한다.

풀이 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-4)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = 5$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 \text{ 이므로}$$

$\triangle ABC$ 는 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

이다.

$\therefore \triangle PBH \sim \triangle ABC$ (AA 닮음)

$$\overline{BH} : \overline{BC} = \overline{HP} : \overline{CA} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BH} : 5 = 4 : 5 \quad \therefore \overline{BH} = 4$$

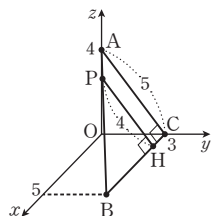
$\triangle PBH$ 와 xy 평면이 이루는 각의 크기를 x° 라 하면 $\triangle PBH$ 와 xy 평면이 이루는 각의 크기는 $\triangle ABC$ 와 xy 평면이 이루는 각의 크기와 같고 이는 직선 AC와 직선 OC가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \cos x^\circ = \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{3}{5}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\triangle PBH \times \cos x^\circ = \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4\right) \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5}$$

참고 $\overline{AO} \perp (xy \text{평면}), \overline{OC} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ 이다. 따라서 $\triangle ABC$ 는 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.



320 선분의 내분점과 외분점 + 두 점 사이의 거리

전략 주어진 정육면체를 좌표공간에 놓고 세 점 A, G, E의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점

H가 원점, 모서리 HE, HG, HD가 각각 x 축, y 축, z 축의 양의 방향과 일치하도록 입체도형을 좌표공간에 놓으면 A(3, 0, 3), G(0, 3, 0), E(3, 0, 0)

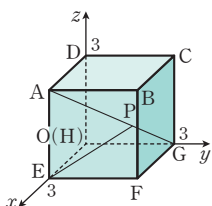
점 P는 선분 AG를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{2 \times 0 + 1 \times 3}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 3}{2+1}\right)$$

$$\therefore P(1, 2, 1)$$

따라서 두 점 E, P 사이의 거리는

$$\overline{EP} = \sqrt{(1-3)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$



321 구의 방정식

전략 구의 평면 위로의 정사영은 원임을 알고 원과 직선 사이의 관계를 이용한다.

풀이 $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 6z + 25 = 0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 9$$

이므로 이 구는 중심의 좌표가 (4, 3, 3)이고 반지름의 길이가 3인 구이다.

이 구의 xy 평면 위로의 정사영의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$$

이 원과 직선 $y=kx$ 가 접하므로 xy 평면을 좌표평면으로 생각하면 원의 중심 (4, 3)과 직선 $y=kx$, 즉 $kx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 3과 같다.

$$\text{즉, } \frac{|4k-3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=3 \text{이므로 } |4k-3|=3\sqrt{k^2+1}$$

$$\text{양변을 제곱하여 정리하면 } 7k^2-24k=0$$

$$k(7k-24)=0 \quad \therefore k=\frac{24}{7} (\because k \neq 0)$$

322 구와 평면의 교선

전략 구의 중심을 구하고, 이 구에 내접하면서 밑면이 xy 평면 위에 있는 원뿔의 부피가 최대인 경우를 생각한다.

풀이 $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$$

이므로 이 구는 중심의 좌표가 (1, 2, -1)이고 반지름의 길이가 3인 구이다.

xy 평면 위의 점은 z 좌표가 0이므로 $z=0$ 을 주어진 구의 방정식에 대입하여 정리하면

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$$

주어진 구의 중심을 C, 점 C에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

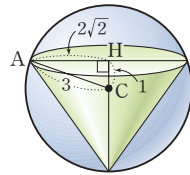
$$\overline{CH}=1$$

또, 오른쪽 그림에서

$$\overline{AC}=3, \overline{AH}=2\sqrt{2}$$

위의 그림과 같이 원뿔의 꼭짓점의 z 좌표가 z 축의 음의 방향에 있을 때 원뿔의 부피는 최대가 되고, 이때 원뿔의 높이는 4이므로 구하는 원뿔의 부피의 최댓값은

$$\frac{1}{3} \times (2\sqrt{2})^2 \pi \times 4 = \frac{32}{3} \pi$$



323 구와 평면의 교선 ⊕ 구와 좌표축의 교점

전략 주어진 조건을 만족시키는 구의 방정식을 구한다.

풀이 구 S의 반지름의 길이를 r , 중심의 좌표를 $C(a, b, c)$

라 하면 $a>0, b>0, c>0$

구 S가 x 축, y 축과 접하는 점을 각각 A, B라 하면

$$A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$$

이때 $r=\overline{AC}=\overline{BC}$ 이므로

$$r^2=b^2+c^2=a^2+c^2 \quad \therefore a=b (\because a>0, b>0)$$

구 S의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-c)^2 = a^2 + c^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓을 수 있다.

xy 평면 위의 점은 z 좌표가 0이므로 $z=0$ 을 ①에 대입하여 정리하면

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$

이 원의 넓이가 64π 이므로

$$a^2\pi=64\pi \quad \therefore a=8 (\because a>0)$$

$a=8$ 을 ①에 대입하면

$$(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-c)^2 = 64 + c^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

z 축 위의 점은 x 좌표, y 좌표가 0이므로 $x=0, y=0$ 을 ②에 대입하면

$$64+64+(z-c)^2=64+c^2, (z-c)^2=c^2-64$$

$$\therefore z=c \pm \sqrt{c^2-64}$$

즉, 구 S가 z 축과 만나는 두 점은

$$(0, 0, c+\sqrt{c^2-64}), (0, 0, c-\sqrt{c^2-64})$$

이 두 점 사이의 거리가 8이므로

$$(c+\sqrt{c^2-64})-(c-\sqrt{c^2-64})=8$$

$$\sqrt{c^2-64}=4, c^2-64=16$$

$$\therefore c^2=80$$

따라서 구 S의 반지름의 길이는 ②에서

$$\sqrt{64+c^2}=\sqrt{64+80}=\sqrt{144}=12$$

324 점이 나타내는 도형의 방정식 ⊕ 점과 구 사이의 거리의 최댓값과 최솟값

전략 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 2 : 1인 점 P(x, y, z)로 놓고 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.

풀이 ㄱ, ㄴ, ㄷ 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 2 : 1인 점

을 P(x, y, z)라 하면 $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 1$ 이므로

$$\overline{AP}=2\overline{PB} \text{에서 } \overline{AP}^2=4\overline{PB}^2$$

$$\{x-(-4)\}^2+y^2+z^2=4\{(2-x)^2+(-y)^2+(-z)^2\}$$

$$x^2+y^2+z^2-8x=0 \quad \therefore (x-4)^2+y^2+z^2=16$$

따라서 도형 S는 중심의 좌표가 (4, 0, 0)이고 반지름의 길이가 4인 구이므로 겹넓이는

$$4\pi \times 4^2 = 64\pi$$

ㄷ, 오른쪽 그림에서 최댓값은

$\overline{CE}$ 의 길이와 같고, 최솟값

은 $\overline{CD}$ 의 길이와 같다.

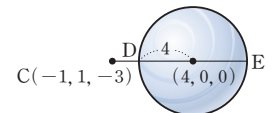
이때 점 C와 구의 중심 사

이의 거리는

$$\sqrt{\{4-(-1)\}^2+(-1)^2+\{-(-3)\}^2}=\sqrt{35}$$

이므로 최댓값은 $\sqrt{35}+4$, 최솟값은 $\sqrt{35}-4$ 이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.



325 선분의 내분점과 외분점

[1단계] 직선과 평면의 평행 관계를 이용하여 사각형 GMNL의 꼴을 알아낸다.

두 선분 MG와 NL은 평행한 두 평면 DEFG와 OABC가 각각 평면 MNLG와 만나서 생기는 교선이므로 두 선분 MG와 NL은 평행하다.

마찬가지로 두 선분 MN과 GL도 평행하므로 평행사변형의 정의에 의하여 사각형 GMNL은 평행사변형임을 알 수 있다.

[2단계] 선분 OA의 중점을 P로 놓고 $\triangle DGM$ 과 $\triangle LPN$ 의 관계를 파악한다.

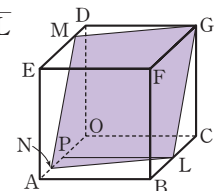
선분 OA의 중점을 P라 하면 $\overline{DG}=\overline{PL}$

평행사변형의 대응하는 변의 길이는

$$\text{같으므로 } \overline{MG}=\overline{NL}$$

정육면체의 한 면은 정사각형이므로

$$\angle GDM=\angle LPN=90^\circ$$



즉, $\triangle DGM$ 과 $\triangle PLN$ 은 합동이다.

[3단계] 점 N의 좌표를 구하여 $a+b+c$ 의 값을 구한다.

이때 $\overline{PN} = \overline{DM} = \frac{1}{4}\overline{DE} = \frac{1}{4}\overline{OA}$ 이므로

$$\overline{ON} = \overline{OP} + \overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{4}\overline{OA} = \frac{3}{4}\overline{OA}$$

따라서 점 N은 선분 OA를 3:1로 내분하는 점이므로 점 N의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 1 + 1 \times 0}{3+1}, \frac{3 \times 2 + 1 \times 0}{3+1}, \frac{3 \times 2 + 1 \times 0}{3+1} \right)$$

$$\text{즉, } \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$\therefore a+b+c = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

326 좌표평면 또는 좌표축에 접하는 구의 방정식

[1단계] 구의 반지름의 길이와 구를 평면 ABC에 정사영한 원의 반지름의 길이가 같음을 이용하여 문제의 상황을 단면도로 나타낸다.

사면체 OABC의 세 면 OAB, OAC, OBC에만 접하는 구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구를 평면 ABC에 정사영한 도형은 오른쪽 그림과 같이 중심이 D이고 반지름의 길이가 r 인 원이다.

[2단계] 원의 접선의 성질과 삼각비를 이용하여 구의 반지름의 길이를 구한다.

이때 $\triangle ABC$ 는 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=\sqrt{3}$ 인 직각삼각형이므로 $\angle A=60^\circ$

또, 구의 중심에서 zx 평면에 내린 수선의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

점 D에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

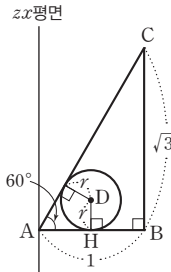
직각삼각형 AHD에서 $\angle DAH=30^\circ$ 이므로

$$\tan 30^\circ = \frac{\overline{DH}}{\overline{AH}} = \frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \therefore r = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$$

[3단계] 구의 부피 공식을 이용하여 구의 부피를 구한다.

따라서 구하는 구의 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{4}{81}\pi$$



실전 대비 마무리 문제

pp. 86~87

327 ⑤	328 ④	329 ②	330 40	331 ④
332 ①	333 ⑤	334 ①		

327 위치 관계

[전략] 두 직선이 만나지도 않고 평행하지도 않을 때, 두 직선은 꼬인 위치에 있음을 이용한다.

[풀이] 직육면체에서 두 꼭짓점을 이은 선분 중 직육면체의 모서리가 아닌 선분은 직육면체의 대각선과 직육면체의 각 면의 대각선이므로 다음 두 경우로 나누어 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수를 구한다.

(i) 두 꼭짓점을 이은 선분이 직육면체의 대각선인 경우

대각선 DF와 꼬인 위치에 있는 모서리는

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AE}$, $\overline{CG}$, $\overline{EH}$, $\overline{HG}$ 의 6개이다.

또, 대칭성에 의하여 직육면체의 다른 대각선의 경우도 꼬인 위치에 있는 모서리가 6개이다.

(ii) 두 꼭짓점을 이은 선분이 직육면체의 각 면의 대각선인 경우

대각선 AC와 꼬인 위치에 있는 모서리는

$\overline{BF}$, $\overline{DH}$, $\overline{EH}$, $\overline{HG}$, $\overline{GF}$, $\overline{EF}$ 의 6개이다.

또, 대칭성에 의하여 직육면체의 각 면의 다른 대각선의 경우도 꼬인 위치에 있는 모서리가 6개이다.

(i), (ii)에서 직육면체의 모서리가 아닌 한 선분과 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수는 6이다.

328 삼수선의 정리 + 이면각

[전략] 점 P에서 직선 l 과 평면 α 에 각각 수선의 발을 내리고 삼수선의 정리를 이용한다.

[풀이] 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 l 과 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면

$$\overline{PN} \perp \alpha, \overline{PM} \perp l$$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

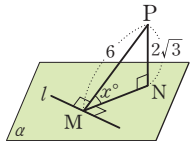
$$\overline{MN} \perp l$$

점 P와 직선 l 에 의하여 결정되는 평면이 평면 α 와 이루는 각의 크기는 선분 PM과 선분 MN이 이루는 각의 크기와 같으므로 $x^\circ = \angle PMN$

이때 $\triangle PMN$ 은 직각삼각형이므로

$$\overline{MN} = \sqrt{\overline{PM}^2 - \overline{PN}^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore \cos x^\circ = \frac{\overline{MN}}{\overline{PM}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



329 직선과 평면이 이루는 각

[전략] 점 M에서 면 DEF에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{EM}$ 과 면 DEF가 이루는 각의 크기는 $\overline{EM}$ 과 $\overline{EH}$ 가 이루는 각의 크기와 같음을 이용한다.

[풀이] 오른쪽 그림과 같이 점 M에서 면 DEF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{MH} \perp \overline{EH}$$

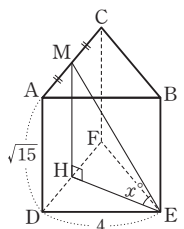
이므로 $\overline{EM}$ 과 면 DEF가 이루는 각의 크기 x° 는 $\overline{EM}$ 과 $\overline{EH}$ 가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 $\triangle DEF$ 는 정삼각형이므로

$$\overline{EH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

따라서 직각삼각형 EHM에서

$$\overline{EM} = \sqrt{\overline{EH}^2 + \overline{MH}^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{15})^2} = 3\sqrt{3}$$



$$\therefore \cos x^\circ = \frac{\overline{EH}}{\overline{EM}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

330 정사영의 넓이

전략 삼각형 BEF의 평면 AEFD 위로의 정사영이 삼각형 DEF임을 이용한다.

풀이 직각삼각형 DAE에서

$$\overline{DE} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

직각삼각형 BDE에서

$$\overline{BD} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{DF} = a \text{라 하면 } \overline{CF} = 9 - a$$

직각삼각형 BDF에서

$$\overline{BF}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DF}^2 = 18 + a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직각삼각형 BCF에서

$$\overline{BF}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CF}^2 = 9 + (9 - a)^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 18 + a^2 = 9 + (9 - a)^2$$

$$18a = 72 \quad \therefore a = 4$$

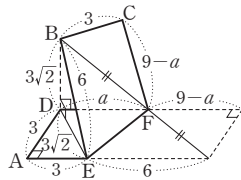
$$\triangle BEF = \frac{1}{2} \times \overline{BE} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

$$\triangle DEF = \frac{1}{2} \times \overline{DF} \times \overline{DA} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

이때 두 평면 AEFD, EFCB가 이루는 각의 크기가 x° 이고 삼각형 BEF의 평면 AEFD 위로의 정사영이 삼각형 DEF이므로 $\triangle BEF \times \cos x^\circ = \triangle DEF$ 에서

$$\cos x^\circ = \frac{\triangle DEF}{\triangle BEF} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore 60 \cos x^\circ = 60 \times \frac{2}{3} = 40$$



331 두 점 사이의 거리 ④ 삼수선의 정리

전략 점 P에서 xy 평면에 수선의 발을 내리고 삼수선의 정리를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P

에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 Q라 하면 $Q(2, 6, 0)$

$$\therefore \overline{PQ} = 3$$

$\overline{PQ} \perp (xy \text{평면}), \overline{PH} \perp l$ 이므로

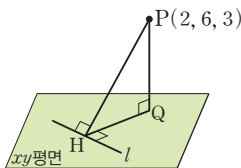
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{QH} \perp l$

점 $Q(2, 6, 0)$ 과 직선 $3x + y = 2$, 즉 $3x + y - 2 = 0$ 사이의

$$\text{거리는 } \overline{QH} = \frac{|3 \times 2 + 6 - 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \sqrt{10}$$

따라서 직각삼각형 PQH에서

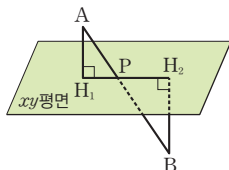
$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{QH}^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{10})^2} = \sqrt{19}$$



332 선분의 내분점과 외분점

전략 두 점 A, B에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 할 때, $\overline{AH_1} : \overline{BH_2}$ 를 구한다.

풀이 두 점 A, B의 z 좌표의 부호가 반대이므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 xy 평면을 기준으로 서로 반대쪽에 있다. 두 점 A, B



에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하면

$$\overline{AH_1} = 2a, \overline{BH_2} = |-3a| = 3a \text{이므로}$$

$$\overline{AH_1} : \overline{BH_2} = 2a : 3a = 2 : 3$$

이때 $\triangle APH_1 \sim \triangle BPH_2$ 이므로 점 P는 $\overline{AB}$ 를 2 : 3으로 내분하는 점이다.

따라서 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-4) + 3 \times 1}{2 + 3}, \frac{2 \times (-1) + 3 \times (-1)}{2 + 3}, \frac{2 \times (-3a) + 3 \times 2a}{2 + 3} \right)$$

$$\text{즉, } (-1, -1, 0)$$

$$\therefore \overline{OP} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

333 구의 방정식

전략 좌표공간에서 구와 평면 α 의 위치 관계를 파악하고, 삼수선의 정리를 이용하여 평면 α 와 xy 평면이 이루는 각과 같은 각을 찾는다.

풀이 구 $(x-5)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 9$ 의 중심의 좌표는

$(5, 4, 0)$ 이고 반지름의 길이는 3이다.

구의 중심을 C라 하고, C

에서 y 축에 내린 수선의

발을 H라 하면 $\overline{CH} = 5$

평면 α 와 구의 접점을 P

라 하면 $\overline{CP} = 3$

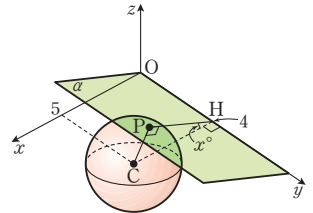
$\overline{CP} \perp \alpha, \overline{CH} \perp \overline{OH}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PH} \perp \overline{OH}$

따라서 $x^\circ = \angle PHC$ 이고,

직각삼각형 PCH에서 $\overline{PH} = \sqrt{\overline{CH}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ 이므로

$$\cos x^\circ = \frac{\overline{PH}}{\overline{CH}} = \frac{4}{5}$$



334 점과 구 사이의 거리의 최댓값과 최솟값

전략 세 점 P, Q, R는 평면 $z=5$ 위에 있으므로 사면체 PQRS의 높이는 구 위의 점 S에서 평면 $z=5$ 까지의 거리와 같음을 이용한다.

풀이 세 점 P, Q, R는 z 좌표가 모두 5이므로 평면 $z=5$ 위에 있다. 따라서 $\triangle PQR$ 를 밑면으로 하는 사면체 PQRS의 높이는 구 위의 점 S에서 평면 $z=5$ 까지의 거리와 같다.

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \overline{PR} = \overline{QR} = 1 \text{이므로}$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2$$

$\triangle PQR$ 는 $\angle PRQ = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{QR} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 9$$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(1, -2, -2)$ 이고 반지름의 길이는 3이다.

이때 구의 중심에서 평면 $z=5$ 까지의 거리는 $|5 - (-2)| = 7$

이므로 사면체 PQRS의 높이의 최댓값은 $7 + 3 = 10$

따라서 사면체 PQRS의 부피의 최댓값은

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 10 = \frac{5}{3}$$