기출 분석 문제집

1등급 만들기

확률과 통계 310제

바른답·알찬풀이

MiraeN 에듀

I 경우의 수

01 순열과 조합

유형 분석 기출

● 9쪽~16쪽

001 ⑤	002 ⑤	003 ③	004 127	005 1600
006 ③	007 363	008 ②	009 ③	010 510
011 24	012 500	013 ④	014 ②	015 ①
016 ③	017 30	018 ②	019 ④	020 ④
021 9	022 ①	023 120	024 30	025 56
026 ④	027 ②	028 ①	029 ①	030 35
031 45	032 ④	033 ②	034 ①	035 ③
036 ③	037 196	038 ⑤	039 ③	040 270
041 26				

001

구하는 날씨의 종류의 개수는 서로 다른 4개의 그림에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_5=4^5=1024$

002

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리를 정하는 경우의 수는 숫자 1, 2, 3 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

일의 자리를 정하는 경우의 수는 1, 3 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로 2

따라서 구하는 홀수의 개수는

$27\times2=54$

003

마지막 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

1, 3, 5의 3개

첫 번째 자리, 두 번째 자리, 세 번째 자리의 숫자를 택하는 방법의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_6\Pi_3=6^3=216$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$3\times216=648$

004

각 전구마다 켜거나 끄는 2가지의 방법이 있으므로 전구 7개로 만들 수 있는 신호의 개수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore\ {}_2\Pi_7=2^7=128$

이때 전구가 모두 꺼진 경우는 제외하므로 구하는 신호의 개수는

$128-1=127$

005

남학생 2명이 고등학교에 배정되는 경우의 수는 서로 다른 5개의 고등학교에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

여학생 3명이 고등학교에 배정되는 경우의 수는 서로 다른 4개의 고등학교에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 경우의 수는

$25\times64=1600$

006

5개의 숫자에서 4개를 택하는 중복순열의 수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$

2를 제외한 나머지 4개의 숫자에서 4개를 택하는 중복순열의 수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$625-256=369$

007

특수 문자를 1개 사용하여 만들 수 있는 암호의 개수는 서로 다른 3개의 문자에서 1개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_1=3$

특수 문자를 2개 사용하여 만들 수 있는 암호의 개수는 서로 다른 3개의 문자에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

같은 방법으로 특수 문자를 3개, 4개, 5개 사용하여 만들 수 있는 암호의 개수는 각각

${}_3\Pi_3=3^3=27$,

${}_3\Pi_4=3^4=81$,

${}_3\Pi_5=3^5=243$

따라서 구하는 암호의 개수는

$3+9+27+81+243=363$

008

(i) 한 자리 자연수의 개수는

1, 2, 3의 3

(ii) 두 자리 자연수의 개수는

$3\times{}_4\Pi_1=3\times4=12$

(iii) 세 자리 자연수의 개수는

$3\times{}_4\Pi_2=3\times4^2=48$

(iv) 1□□□ 꼴의 네 자리 자연수의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

이상에서 2000보다 작은 자연수의 개수는

$3+12+48+64=127$

이므로 2000은 128번째 수이다.

1등급 비법

자연수의 개수

자연수 n $(n\le9)$, m에 대하여

(1) $1, 2, 3, \cdots, n$의 n개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 m자리 자연수의 개수

⇨ ${}_n\Pi_m$

(2) $0, 1, 2, \cdots, n$의 $(n+1)$개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 m자리 자연수의 개수

⇨ $\boxed{n}\times{}_{n+1}\Pi_{m-1}$

맨 앞자리에 0이 올 수 없다.

009

조건 (가)에서 양 끝 모두에 대문자가 나오는 경우의 수는 대문자 X, Y 중에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_2=2^2=4$

조건 (나)에서 a는 양 끝을 제외한 네 자리 중 한 자리에만 나와야 하므로 a의 자리를 정하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

나머지 세 자리에 문자를 나열하는 경우의 수는 세 문자 b, X, Y 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times4\times27=432$

010

서로 다른 사탕 6개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_6=3^6=729$

(i) 한 학생이 사탕을 4개 받는 경우의 수는

$${}_3C_1\times{}_6C_4\times4={}_3C_1\times{}_6C_2\times4$$
$$=3\times\frac{6\times5}{2\times1}\times4=180$$

나머지 2명의 학생이 나머지 2개의 사탕을 받는 경우의 수

(ii) 한 학생이 사탕을 5개 받는 경우의 수는

$${}_3C_1\times{}_6C_5\times2={}_3C_1\times{}_6C_1\times2$$
$$=3\times6\times2=36$$

(iii) 한 학생이 사탕을 6개 받는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

이상에서 구하는 경우의 수는

$729-(180+36+3)=510$

011

X에서 Y로의 함수는 집합 Y의 원소 -1, 1에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 3, 5, 7에 대응시키면 된다.

따라서 모든 함수의 개수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$a={}_2\Pi_4=2^4=16$

$f(1)\ne1$이면 집합 X의 원소 1에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 -1뿐이다.

또, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$의 값을 정하는 방법의 수는 -1, 1의 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 $f(1)\ne1$인 함수의 개수는

$b=1\times8=8$

$\therefore a+b=24$

012

$f(1)+f(4)=7$을 만족시키는 $f(1)$, $f(4)$의 값을 순서쌍 $(f(1), f(4))$로 나타내면

$(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$의 4가지

$f(2)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 방법의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 함수의 개수는

$4\times125=500$

013

(i) x가 홀수인 경우

조건 (가)에서 $x+f(x)$가 짝수가 되려면 $f(x)$가 홀수이어야 한다.

조건 (가)를 만족시키면서 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 방법의 수는 3개의 홀수 1, 3, 5 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이때 1을 제외한 2개의 홀수 3, 5 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$27-8=19$

(ii) x가 짝수인 경우

조건 (가)에서 $x+f(x)$가 짝수가 되려면 $f(x)$가 짝수이어야 한다.

조건 (가)를 만족시키면서 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 방법의 수는 2개의 짝수 2, 4 중에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_2=2^2=4$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$19\times4=76$

014

양 끝에 2개의 a를 나열한 후 그 사이에 나머지 5개의 문자 s, u, s, g, e를 일렬로 나열하면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

015

3, 4, 5의 순서가 정해져 있으므로 3, 4, 5를 모두 X로 생각하여 1, 1, 1, 2, X, X, X를 일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 3, 두 번째 X는 4, 세 번째 X는 5로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{7!}{3!\times3!}=140$

1등급 비법

서로 다른 n개를 일렬로 나열할 때, 특정한 r $(0<r\le n)$개를 미리 정해진 순서대로 나열하는 방법의 수는 순서가 정해진 r개를 같은 것으로 생각하여 같은 것이 r개 포함된 n개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다. 즉,

$\frac{n!}{r!}$

016

a와 d, c와 e의 순서가 각각 정해져 있으므로 a, d를 모두 X로, c, e를 모두 Y로 생각하여 6개의 문자 X, b, Y, X, Y, f를 일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 a, 두 번째 X는 d, 첫 번째 Y는 c, 두 번째 Y는 e로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!}=180$

017

5개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3에서 4개를 택하는 경우는
1, 2, 2, 3 또는 1, 2, 3, 3 또는 2, 2, 3, 3

(i) 4개의 숫자 1, 2, 2, 3으로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ii) 4개의 숫자 1, 2, 3, 3으로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(iii) 4개의 숫자 2, 2, 3, 3으로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

이상에서 구하는 자연수의 개수는
$12+12+6=30$

018

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{10!}{6!\times4!}=210$

A 지점에서 $\overline{\text{PQ}}$를 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

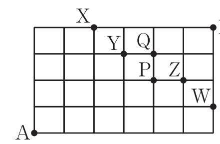
A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수

$\frac{6!}{4!\times2!}\times1\times\frac{3!}{2!}=45$

Q 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수

따라서 구하는 방법의 수는
$210-45=165$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 네 지점 X, Y, Z, W를 정하면 A 지점에서 $\overline{\text{PQ}}$를 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법은



A ⟶ X ⟶ B, A ⟶ Y ⟶ B
A ⟶ Z ⟶ B, A ⟶ W ⟶ B
중 하나이다.

(i) A ⟶ X ⟶ B로 가는 방법의 수는

$\frac{6!}{2!\times4!}\times1=15$

(ii) A ⟶ Y ⟶ B로 가는 방법의 수는

$\frac{6!}{3!\times3!}\times\frac{4!}{3!}=80$

(iii) A ⟶ Z ⟶ B로 가는 방법의 수는

$\frac{7!}{5!\times2!}\times\frac{3!}{2!}=63$

(iv) A ⟶ W ⟶ B로 가는 방법의 수는

$\frac{7!}{6!}\times1=7$

이상에서 구하는 방법의 수는
$15+80+63+7=165$

019

m과 w를 제외한 6개의 문자 t, o, o, r, r, o를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{6!}{3!\times2!}=60$

6개의 문자 사이사이와 양 끝을 포함한 7개의 자리 중 2개를 택하여 m과 w를 나열하는 방법의 수는
${}_7P_2=42$
따라서 구하는 방법의 수는
$60\times42=2520$

다른 풀이 8개의 문자 t, o, m, o, r, r, o, w를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{8!}{3!\times2!}=3360$

m과 w를 한 문자 X로 생각하여 7개의 문자 t, o, o, r, r, o, X를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{7!}{3!\times2!}=420$

이때 m과 w의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

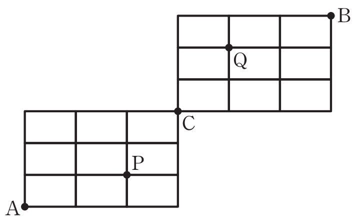
즉, m과 w가 이웃하도록 나열하는 방법의 수는

$420\times2=840$

따라서 구하는 방법의 수는

$3360-840=2520$

020



위의 그림과 같이 C 지점을 정하고 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하자.

(i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 1개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}=3$

마찬가지 방법으로 P 지점에서 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

즉, A 지점에서 P 지점을 지나 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$3\times3=9$

(ii) C 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times3!}=20$

C 지점에서 Q 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 A 지점에서 P 지점을 지나 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 같으므로 9

즉, C 지점에서 B 지점까지 Q 지점을 지나지 않고 최단 거리로 가는 경우의 수는

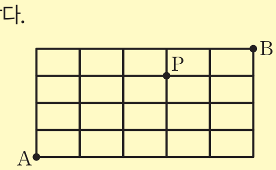
$20-9=11$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$9\times11=99$

1등급 비법

아래 그림과 같은 도로망에서 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 다음과 같다.



(i) P 지점을 지나는 경우

(A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수)

$\times$(P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수)

(ii) P 지점을 지나지 않는 경우

(A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수)

$-$(A 지점에서 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수)

021

$36=2^2\times3^2$이고 a, b, c 중 2개가 같아야 하므로

$36=2\times2\times9=3\times3\times4=6\times6\times1$

각각에 대하여 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 곱해진 3개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$3\times3=9$

022

(i) 일의 자리 숫자가 0인 경우

1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times3!}=10$

(ii) 일의 자리 숫자가 2인 경우

0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

즉, 일의 자리 숫자가 2인 짝수의 개수는

$30-6=24$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$10+24=34$

다른 풀이 (i) 맨 앞자리의 숫자가 1인 경우

0, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

일의 자리 숫자가 1인 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

→ 0, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수

즉, 맨 앞자리의 숫자가 1인 짝수의 개수는

$20-4=16$

(ii) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

일의 자리 숫자가 1인 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

→ 0, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수

즉, 맨 앞자리의 숫자가 2인 짝수의 개수는

$30-12=18$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는 $16+18=34$

023

조건 (가)를 만족시키도록 택한 6개의 숫자를 각각

1, 2, 3, a, b, c (a, b, c는 3 이하의 자연수)

라 하자.

조건 (나)에서 $1+2+3+a+b+c=12$이므로

$a+b+c=6$

(i) 1, 2, 3을 제외한 3개의 숫자가 1, 2, 3인 경우

6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$

(ii) 1, 2, 3을 제외한 3개의 숫자가 2, 2, 2인 경우

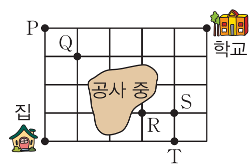
6개의 숫자 1, 2, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{4!}=30$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$90+30=120$

024



위의 그림과 같이 다섯 지점 P, Q, R, S, T를 정하자.

이때 집에서 학교까지 최단 거리로 가는 방법은

집 ⟶ P ⟶ 학교,

집 ⟶ Q ⟶ 학교,

집 ⟶ R ⟶ S ⟶ 학교,

집 ⟶ T ⟶ 학교

중 하나이다.

(i) 집 ⟶ P ⟶ 학교로 가는 방법의 수는

$1\times1=1$

(ii) 집 ⟶ Q ⟶ 학교로 가는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{3!}\times\dfrac{5!}{4!}=4\times5=20$

(iii) 집 ⟶ R ⟶ S ⟶ 학교로 가는 방법의 수는

$1\times1\times\dfrac{4!}{3!}=4$

(iv) 집 ⟶ T ⟶ 학교로 가는 방법의 수는

$1\times\dfrac{5!}{4!}=5$

이상에서 구하는 방법의 수는

$1+20+4+5=30$

1등급 비법

도로망에서 최단 거리로 가는 방법의 수를 바로 구할 수 없을 때는 반드시 거쳐야 하는 지점을 잡아 최단 거리로 가는 방법의 수를 구한다.

025

구하는 서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_5={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3$

$=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

026

무기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_{10}={}_{2+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{11}\mathrm{C}_{10}={}_{11}\mathrm{C}_1=11$

$\therefore a=11$

또, 기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 10개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_{10}=2^{10}=1024$

$\therefore b=1024$

$\therefore a+b=1035$

오답 피하기 무기명 투표는 어느 유권자가 어느 후보자를 뽑았는지 알 수 없으므로 후보자 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합으로 생각할 수 있다.

027

1부터 9까지 9개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 x, y, z의 값으로 정하면 되므로 서로 다른 9개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_9\mathrm{H}_3={}_{9+3-1}\mathrm{C}_3={}_{11}\mathrm{C}_3$

$=\dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$

028

세 상자 A, B, C에 담는 인형의 수를 각각 a, b, c라 하자.

$a+b+c=5$이고 $a\ge1, b\ge1, c\ge1$이므로

$a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1$ (a', b', c'은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=5$

$\therefore a'+b'+c'=2$

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2$

$=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

다른 풀이 (i) 세 상자 A, B, C에 인형 5개를 1개, 1개, 3개씩 각각 나누어 담는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

(ii) 세 상자 A, B, C에 인형 5개를 1개, 2개, 2개씩 각각 나누어 담는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3+3=6$

1등급 비법

n명에게 같은 물건 r개를 나누어 줄 때, 한 명에게 적어도 한 개를 나누어 주는 방법의 수는

${}_n\mathrm{H}_{r-n}$ (단, $n\le r$)

029

먼저 장미 꽃 5송이, 목화 꽃 3송이를 사고 나머지 7송이의 꽃을 더 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_7={}_{4+7-1}\mathrm{C}_7={}_{10}\mathrm{C}_7={}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

030

$x+y+z+w\le3$에서 x, y, z, w가 모두 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z+w=0$ 또는 $x+y+z+w=1$ 또는

$x+y+z+w=2$ 또는 $x+y+z+w=3$

(i) $x+y+z+w=0$일 때,

음이 아닌 정수인 해의 개수는

${}_4\mathrm{H}_0={}_{4+0-1}\mathrm{C}_0={}_3\mathrm{C}_0=1$

(ii) $x+y+z+w=1$일 때,

음이 아닌 정수인 해의 개수는

${}_4\mathrm{H}_1={}_{4+1-1}\mathrm{C}_1={}_4\mathrm{C}_1=4$

(iii) $x+y+z+w=2$일 때,

음이 아닌 정수인 해의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(iv) $x+y+z+w=3$일 때,

음이 아닌 정수인 해의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_3={}_{4+3-1}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

이상에서 구하는 해의 개수는

$1+4+10+20=35$

다른 풀이 $x+y+z+w$의 값이 0, 1, 2, 3일 때의 모든 경우의 수는 음이 아닌 정수 k에 대하여 방정식 $x+y+z+w+k=3$에서 k의 값이 0, 1, 2, 3일 때의 모든 경우의 수와 같다.

따라서 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5\mathrm{H}_3={}_{5+3-1}\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

031

x, y, z가 홀수인 자연수이므로

$x=2X+1$, $y=2Y+1$, $z=2Z+1$ (X, Y, Z는 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$x+y+z=19$에서

$(2X+1)+(2Y+1)+(2Z+1)=19$

$2X+2Y+2Z=16$

$\therefore X+Y+Z=8$

따라서 방정식 $x+y+z=19$를 만족시키는 홀수인 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $X+Y+Z=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_8={}_{3+8-1}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$$

032

x, y, z는 $x\ge0$, $y\ge1$, $z\ge2$인 정수이므로

$x=X$, $y=Y+1$, $z=Z+2$ (X, Y, Z는 음이 아닌 정수)

로 놓으면 $x+y+z=k$에서

$X+(Y+1)+(Z+2)=k$

$\therefore X+Y+Z=k-3$

즉, 방정식 $x+y+z=k$를 만족시키는 $x\ge0$, $y\ge1$, $z\ge2$인 정수인 해의 개수는 방정식 $X+Y+Z=k-3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_{k-3}={}_{3+(k-3)-1}\mathrm{C}_{k-3}$$
$$={}_{k-1}\mathrm{C}_{k-3}={}_{k-1}\mathrm{C}_2$$

이때 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수는 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같으므로

$$\frac{(k-1)(k-2)}{2\times1}=21$$

$k^2-3k+2=42$, $k^2-3k-40=0$

$(k+5)(k-8)=0$

$\therefore k=8$ ($\because$ k는 자연수)

033

(i) $d=1$인 경우

$a+b+c+4=12$

$\therefore a+b+c=8$

a, b, c는 자연수이므로

$a=A+1$, $b=B+1$, $c=C+1$ (A, B, C는 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$(A+1)+(B+1)+(C+1)=8$

$\therefore A+B+C=5$

즉, 방정식 $a+b+c=8$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 방정식 $A+B+C=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2$$
$$=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

(ii) $d=2$인 경우

$a+b+c+8=12$

$\therefore a+b+c=4$

a, b, c는 자연수이므로

$a=A+1$, $b=B+1$, $c=C+1$ (A, B, C는 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$(A+1)+(B+1)+(C+1)=4$

$\therefore A+B+C=1$

즉, 방정식 $a+b+c=4$를 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 방정식 $A+B+C=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_1={}_{3+1-1}\mathrm{C}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$21+3=24$

034

조건 (나)에서 $|a^2-b^2|=5$이므로

$a^2-b^2=5$ 또는 $a^2-b^2=-5$

$\therefore (a+b)(a-b)=5$ 또는 $(b+a)(b-a)=5$

이때 a, b는 자연수이므로

(i) $(a+b)(a-b)=5$에서

$a+b=5$, $a-b=1$

$\therefore a=3$, $b=2$

(ii) $(b+a)(b-a)=5$에서

$b+a=5$, $b-a=1$

$\therefore a=2$, $b=3$

(i), (ii)에서 조건 (나)를 만족시키는 자연수 a, b의 값을 정하는 경우의 수는 2이다.

$a+b=5$이므로 조건 (가)의 방정식 $a+b+c+d+e=12$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 방정식 $c+d+e=7$을 만족시키는 자연수 c, d, e의 순서쌍 (c, d, e)의 개수와 같다.

이때 $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$ (c', d', e'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$c+d+e=7$에서

$(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=7$

$\therefore c'+d'+e'=4$

즉, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 방정식 $c'+d'+e'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 c', d', e'의 순서쌍 (c', d', e')의 개수와 같으므로

$${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$2\times15=30$

035

노란색 카드가 1장이므로 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생은 1명뿐이다.

노란색 카드 1장을 받을 학생을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

노란색 카드를 받은 학생에게 파란색 카드 1장을 먼저 나누어 준 후 남은 파란색 카드 1장을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

노란색 카드를 받은 학생에게 빨간색 카드 1장을 먼저 나누어 준 후 남은 빨간색 카드 3장을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times3\times10=90$

036

7개의 공을 3개의 바구니에 남김없이 나누어 담는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$$

첫 번째 바구니에 5개 이상의 공을 담는 경우의 수는 먼저 첫 번째 바구니에 5개의 공을 담고 남은 2개의 공을 3개의 바구니에 남김없이 나누어 담는 경우의 수와 같다.

즉, 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

마찬가지 방법으로 두 번째 바구니에 5개 이상의 공을 담는 경우의 수도 6이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$36-(6+6)=24$

037

$a\le c\le d$이고 $b\le c\le d$이므로 $a\le b\le c\le d$ 또는 $b\le a\le c\le d$인 경우의 수에서 $a=b\le c\le d$인 경우의 수를 빼서 구한다.

(i) $a\le b\le c\le d$인 경우

$a\le b\le c\le d$인 6 이하의 자연수의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_4={}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$

(ii) $b\le a\le c\le d$인 경우

$b\le a\le c\le d$인 6 이하의 자연수의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_4={}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$

(iii) $a=b\le c\le d$인 경우

$a=b\le c\le d$인 6 이하의 자연수의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_3={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$126+126-56=196$

038

집합 X의 4개의 원소 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 작거나 같은 수부터 차례대로 집합 X의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 된다. 따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수에 $f(1)$이 가질 수 있는 값의 개수를 곱하면 되므로

$$\begin{aligned}{}_4H_3\times4&={}_{4+3-1}C_3\times4={}_6C_3\times4\\&=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times4=80\end{aligned}$$

039

$f(2)=7$이므로

$f(1)\le7\le f(3)\le f(4)\le f(5)$

$f(1)\le7$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 6, 7의 2개

또, $7 \le f(3) \le f(4) \le f(5)$를 만족시키는 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 방법은 집합 Y의 4개의 원소 7, 8, 9, 10 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 집합 X의 원소 3, 4, 5에 대응시키면 된다.
이때 이 방법의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$$

따라서 구하는 함수의 개수는
$2\times20=40$

040

조건 (가)에서 $f(1)\times f(5)=6$이고
조건 (나)에서 $2f(1)\le 2f(5)$, 즉 $f(1)\le f(5)$

(i) $f(1)=1$, $f(5)=6$인 경우
조건 (나)에서 $2\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le 12$
$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 방법의 수는 2, 3, 4, 5, 6 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$$

$f(6)$의 값을 정하는 방법의 수는 6
즉, 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$35\times6=210$

(ii) $f(1)=2$, $f(5)=3$인 경우
조건 (나)에서 $4\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le 6$
$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 방법의 수는 4, 5, 6 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$$

$f(6)$의 값을 정하는 방법의 수는 6
즉, 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$10\times6=60$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는
$210+60=270$

041

(i) 조건 (가)에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$
이를 만족시키는 함수 f의 개수는 1, 2, 3, 4 중에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_4 = {}_{4+4-1}C_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$$

(ii) $f(2)=3$이면 $f(1)\le 3\le f(3)\le f(4)$
$f(1)$의 값을 정하는 방법의 수는 1, 2, 3 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로 3
$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 방법의 수는 3, 4 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$
따라서 $f(2)=3$인 함수 f의 개수는
$3\times3=9$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는
$35-9=26$

내신 적중 서술형

● 17쪽

042 17 **043** 30 **044** 10
045 (1) 120 (2) 20 (3) 56

042

(i) 2개 이하의 숫자 중 중복을 허용하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우
㉠ 숫자 1, 2 중 중복을 허용하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 숫자 1, 2 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$
㉡ 숫자 2, 3 중 중복을 허용하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 숫자 2, 3 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$
㉢ 숫자 1, 3 중 중복을 허용하여 3개를 택한 후 일렬로 나열하는 경우는 이웃한 두 수의 차가 1 이하가 되지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.
㉠, ㉡에서 숫자 2를 3개 택해 일렬로 나열하는 경우가 중복되었으므로 이 경우의 수는
$8+8-1=15$ …… ㉮

(ii) 숫자 1, 2, 3을 모두 택해 일렬로 나열하는 경우
1과 3이 이웃하지 않아야 하므로 1, 2, 3 또는 3, 2, 1의 2가지이다. …… ㉯

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$15+2=17$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 2개 이하의 숫자 중 중복을 허용하여 3개를 택해 조건에 맞게 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	50 %
㉯ 숫자 1, 2, 3을 모두 택해 조건에 맞게 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	30 %
㉰ 이웃한 두 수의 차가 모두 1 이하가 되도록 나열하는 경우의 수 구하기	20 %

043

일의 자리, 십의 자리, 백의 자리에 소수 3, 7, 7을 나열하는 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}=3$ …… ㉮
나머지 자리에 4, 4, 6, 6, 6을 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!\times3!}=10$ …… ㉯

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times10=30$ …… ㈐

채점 기준	배점 비율
㈎ 일, 십, 백의 자리에 소수를 나열하는 경우의 수 구하기	40 %
㈏ 일, 십, 백의 자리를 제외한 자리에 소수가 아닌 수를 나열하는 경우의 수 구하기	40 %
㈐ 일, 십, 백의 자리 숫자가 모두 소수인 경우의 수 구하기	20 %

044

고구마 피자, 새우 피자, 불고기 피자, 치즈 피자 중에서 m개를 주문하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 m개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_m={}_{4+m-1}C_m={}_{m+3}C_m={}_{m+3}C_3$

$=\dfrac{(m+3)(m+2)(m+1)}{3\times2\times1}=84$

$(m+3)(m+2)(m+1)=504=9\times8\times7$

$\therefore m=6$ …… ㈎

고구마 피자, 새우 피자, 불고기 피자, 치즈 피자를 적어도 하나씩 포함하여 6개를 주문하려면 4종류의 피자를 1개씩 주문하고 나머지 2개의 피자를 더 주문하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$ …… ㈏

채점 기준	배점 비율
㈎ m의 값 구하기	50 %
㈏ 각 종류의 피자를 적어도 하나씩 포함하여 m개를 주문하는 경우의 수 구하기	50 %

045

(1) $f(1), f(2), f(3)$의 값을 정하는 방법은 집합 Y의 6개의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 3개를 택하여 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

이때 이 방법의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$_6P_3=6\times5\times4=120$ …… ㈎

(2) $f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키는 $f(1), f(2), f(3)$의 값을 정하는 방법은 집합 Y의 6개의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

이때 이 방법의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$ …… ㈏

(3) $f(1)\le f(2)\le f(3)$을 만족시키는 $f(1), f(2), f(3)$의 값을 정하는 방법은 집합 Y의 6개의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

이때 이 방법의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_6H_3={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3$

$=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$ …… ㈐

	채점 기준	배점 비율
(1)	㈎ 일대일함수의 개수 구하기	30 %
(2)	㈏ $f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키는 함수의 개수 구하기	30 %
(3)	㈐ $f(1)\le f(2)\le f(3)$을 만족시키는 함수의 개수 구하기	40 %

1등급 비법

집합 $X=\{1, 2, 3, \cdots, r\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ (r, n은 자연수)으로의 함수 f에 대하여 $x_1\in X$, $x_2\in X$일 때,

(1) 일대일함수 f의 개수
⇨ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수
⇨ $_nP_r$ (단, $n\ge r$)

(2) $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수
⇨ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수
⇨ $_nC_r$ (단, $n\ge r$)

(3) $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수
⇨ 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수
⇨ $_nH_r$

1등급 실력 완성

• 18쪽 ~ 19쪽

046 7 **047** ① **048** 540 **049** 32 **050** ①
051 ④ **052** ③ **053** ② **054** 198

046

중복순열

(전략) 깃발을 1번, 2번, …, n번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수를 각각 구해 본다.

(풀이) 깃발을 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_1=2$

깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$_2\Pi_2=2^2$

같은 방법으로 깃발을 3번, 4번, …, n번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각

$_2\Pi_3=2^3$, $_2\Pi_4=2^4$, …, $_2\Pi_n=2^n$

이므로 n번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$2+2^2+2^3+\cdots+2^n$

$n=6$일 때,

$2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=126<200$

$n=7$일 때,

$2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7=254>200$

따라서 n의 최솟값은 7이다.

047

중복순열

전략 전체 경우에서 두 개 이하의 층에서 모두 내리는 경우를 제외한다.

풀이 (i) 5명이 1층, 2층, 3층에서 모두 내리는 경우의 수는 1층, 2층, 3층 중 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_5=3^5=243$

(ii) 5명이 한 개의 층에서 모두 내리는 경우의 수는 3

(iii) 5명이 두 개의 층에서 모두 내리고, 두 개의 각 층에서 적어도 한 명 이상 내리는 경우

1층, 2층, 3층 중 두 개의 층을 택하는 경우의 수는

$_3C_2={}_3C_1=3$

5명이 두 개의 층에서 모두 내리는 경우의 수는 두 개의 층 중 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_5=2^5=32$

5명이 두 개의 층 중 한 개의 층에서 모두 내리는 경우의 수는 2

따라서 이 경우의 수는

$3\times(32-2)=90$

이상에서 구하는 경우의 수는

$243-(3+90)=150$

다른 풀이 각 층에서 적어도 한 명씩은 내리는 경우는 다음과 같다.

(i) 1명, 1명, 3명이 내리는 경우

5명을 1명, 1명, 3명으로 모둠을 나누는 경우의 수는

$$_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\frac{1}{2}=5\times4\times1\times\frac{1}{2}$$
$$=10$$

세 모둠이 1층, 2층, 3층에 나누어 내리는 경우의 수는

$3!=6$

즉, 이 경우의 수는

$10\times6=60$

(ii) 2명, 2명, 1명이 내리는 경우

5명을 2명, 2명, 1명으로 모둠을 나누는 경우의 수는

$$_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\frac{1}{2}=\frac{5\times4}{2\times1}\times3\times1\times\frac{1}{2}$$
$$=15$$

세 모둠이 1층, 2층, 3층에 나누어 내리는 경우의 수는

$3!=6$

즉, 이 경우의 수는

$15\times6=90$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$60+90=150$

048

중복순열; 함수의 개수

전략 치역과 공역이 같은 경우는 집합 X의 원소가 집합 Y의 원소 a, b, c에 모두 대응하는 경우임을 이용한다.

풀이 X에서 Y로의 함수는 집합 Y의 원소 a, b, c에서 중복을 허용하여 6개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6에 대응시키면 된다.

따라서 X에서 Y로의 함수 f의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_3\Pi_6=3^6=729$

(i) 치역의 원소가 2개인 경우

치역이 $\{a, b\}$인 함수의 개수는 치역의 원소 a, b의 2개에서 6개를 택하는 중복순열의 수에서 치역이 $\{a\}$ 또는 $\{b\}$인 함수의 개수를 뺀 것과 같으므로

$_2\Pi_6-2=2^6-2=62$

치역이 $\{b, c\}$, $\{a, c\}$인 함수의 개수도 각각 62이므로 치역의 원소가 2개인 함수의 개수는

$62\times3=186$

(ii) 치역의 원소가 1개인 경우

치역이 $\{a\}$ 또는 $\{b\}$ 또는 $\{c\}$인 함수의 개수는 3

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$729-(186+3)=540$

참고 치역과 공역이 같다는 것은 집합 Y의 각 원소마다 대응되는 집합 X의 원소가 반드시 있다는 뜻이다.

049

중복순열; 함수의 개수

전략 $x=1$, 2일 때의 순서쌍 $(f(x), f(-x))$를 구한다.

풀이 조건 (가)에서

$|f(x)+f(-x)|=2$ ...... ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면

$|f(0)|=1$

즉, $f(0)=1$ 또는 $f(0)=-1$의 2가지

㉠에 $x=1$, 2를 각각 대입하면

$|f(1)+f(-1)|=2$, $|f(2)+f(-2)|=2$

조건 (나)에서 $f(1)\geq0$, $f(2)\geq0$이므로 순서쌍 $(f(1), f(-1))$, $(f(2), f(-2))$는 $(0, -2)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ 중 하나이다.

따라서 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 방법의 수는 4개의 순서쌍 $(0, -2)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ 중에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$2\times16=32$

050

같은 것이 있는 순열

전략 ★ 모양의 스티커의 장수를 기준으로 4장의 스티커를 고르는 경우를 파악해 본다.

풀이 ★ 모양의 스티커가 3장, ♥ 모양의 스티커가 1장, ♣ 모양의 스티커가 2장이므로

(i) ★, ★, ★, ♥를 골라 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

(ii) ★, ★, ★, ♣를 골라 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(iii) ★, ★, ♥, ♣를 골라 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(iv) ★, ★, ♣, ♣를 골라 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

(v) ★, ♥, ♣, ♣를 골라 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

이상에서 구하는 모든 배열의 수는

$4+4+12+6+12=38$

051

같은 것이 있는 순열

전략 점 P가 상(↑), 하(↓), 좌(←), 우(→)로 움직이는 횟수를 각각 a, b, c, d로 놓고 관계식을 구한다.

풀이 점 P가 상(↑), 하(↓), 좌(←), 우(→)로 움직이는 횟수를 각각 a, b, c, d (a, b, c, d는 음이 아닌 정수)로 놓으면

$a+b+c+d=7$,

$a-b=1$,

$-c+d=-2$

위의 세 식에서 b, c, d를 각각 a에 대한 식으로 나타내면

$b=a-1$, $c=5-a$, $d=3-a$ …… ㉠

(i) $a=1$인 경우

㉠을 만족시키는 b, c, d의 값은 $b=0$, $c=4$, $d=2$이므로

↑, ←, ←, ←, ←, →, →로 이동하는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!\times2!}=105$

(ii) $a=2$인 경우

㉠을 만족시키는 b, c, d의 값은 $b=1$, $c=3$, $d=1$이므로

↑, ↑, ↓, ←, ←, ←, →로 이동하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times3!}=420$

(iii) $a=3$인 경우

㉠을 만족시키는 b, c, d의 값은 $b=2$, $c=2$, $d=0$이므로

↑, ↑, ↑, ↓, ↓, ←, ←로 이동하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\times2!\times2!}=210$

이상에서 구하는 경우의 수는

$105+420+210=735$

참고 $a-b=1$에서 $b=a-1$

$b=a-1$을 $a+b+c+d=7$에 대입하면

$a+(a-1)+c+d=7$

$\therefore c+d=8-2a$

$c+d=8-2a$와 $-c+d=-2$를 연립하여 c, d를 각각 a에 대한 식으로 나타내면

$c=5-a$, $d=3-a$

052

중복조합

전략 조건 (가), (나)를 만족시키는 경우에서 a, b, c, d, e가 모두 홀수인 경우를 제외한다.

풀이 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 조건 (가), (나)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e)에서 a, b, c, d, e가 모두 홀수인 순서쌍 (a, b, c, d, e)를 제외한 것의 개수와 같다.

(i) $a+b+c+d+e=9$이고 $a+b$는 짝수인 경우

$c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$ (c', d', e'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$a+b+(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=9$

$\therefore a+b+c'+d'+e'=6$

㉠ $a+b=2$인 경우

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$의 1가지이고,

$c'+d'+e'=4$인 순서쌍 (c', d', e')의 개수는

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2$

$=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

즉, 이 경우의 수는

$1\times15=15$

㉡ $a+b=4$인 경우

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3가지이고,

$c'+d'+e'=2$인 순서쌍 (c', d', e')의 개수는

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2$

$=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

즉, 이 경우의 수는

$3\times6=18$

㉢ $a+b=6$인 경우

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 5가지이고,

$c'+d'+e'=0$인 순서쌍 (c', d', e')의 개수는 1이다.

즉, 이 경우의 수는

$5\times1=5$

이상에서 조건 (가), (나)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$15+18+5=38$

(ii) $a+b+c+d+e=9$이고 a, b, c, d, e가 모두 홀수인 경우

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+1$, $e=2e'+1$ (a', b', c', d', e'은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+1)+(2e'+1)=9$

$\therefore a'+b'+c'+d'+e'=2$

이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는

${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2$

$=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$38-15=23$

참고 (ii)에서 a, b, c, d, e가 모두 홀수이면 $a+b$는 항상 짝수이므로 조건 (나)가 성립하는지는 확인하지 않아도 된다.

053

중복조합

전략 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$인 경우에서 $a_1 = a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$ 또는 $a_1 \le a_2 \le a_3 = a_4 \le a_5$인 경우를 제외한다.

풀이 (i) $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$를 만족시키는 경우

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 5개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5의 값으로 정하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_6H_5 = {}_{6+5-1}C_5 = {}_{10}C_5$$
$$= \frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1} = 252$$

(ii) $a_1 = a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$를 만족시키는 경우

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 a_1, a_3, a_4, a_5의 값으로 정하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_6H_4 = {}_{6+4-1}C_4 = {}_9C_4$$
$$= \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 126$$

(iii) $a_1 \le a_2 \le a_3 = a_4 \le a_5$를 만족시키는 경우

(ii)와 마찬가지 방법으로 경우의 수는 126

(iv) $a_1 = a_2 \le a_3 = a_4 \le a_5$를 만족시키는 경우

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 작거나 같은 수부터 차례대로 a_1, a_3, a_5의 값으로 정하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_6H_3 = {}_{6+3-1}C_3 = {}_8C_3$$
$$= \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$252-(126+126-56)=56$

054

중복조합; 함수의 개수

전략 $f(2)-f(1)$의 값을 기준으로 경우를 나누어 함수 f의 개수를 구한다.

풀이 조건 (가)의 각 변에서 $f(1)$을 빼면

$0 \le f(2)-f(1) \le f(3) \le f(4)$

조건 (나)에서 $f(1)+f(2)$가 짝수이므로 $f(1)$과 $f(2)$는 모두 홀수이거나 모두 짝수이다.

즉, $f(2)-f(1)$은 0 또는 2 또는 4이다.

(i) $f(2)-f(1)=0$인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2))$는 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$ 중 하나이고,

$0 \le f(3) \le f(4)$이므로 순서쌍 $(f(3), f(4))$의 개수는

$${}_6H_2 = {}_{6+2-1}C_2 = {}_7C_2$$
$$= \frac{7\times6}{2\times1} = 21$$

즉, 함수 f의 개수는

$6\times21=126$

(ii) $f(2)-f(1)=2$인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2))$는 $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 6)$ 중 하나이고,

$2 \le f(3) \le f(4)$이므로 순서쌍 $(f(3), f(4))$의 개수는

$${}_5H_2 = {}_{5+2-1}C_2 = {}_6C_2$$
$$= \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

즉, 함수 f의 개수는

$4\times15=60$

(iii) $f(2)-f(1)=4$인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2))$는 $(1, 5)$, $(2, 6)$ 중 하나이고,

$4 \le f(3) \le f(4)$이므로 순서쌍 $(f(3), f(4))$의 개수는

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2$$
$$= \frac{4\times3}{2\times1} = 6$$

즉, 함수 f의 개수는

$2\times6=12$

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$126+60+12=198$

도전 1등급 최고난도

20쪽

055 345 **056** ① **057** 90

055

중복순열

1단계 꽃과 초콜릿을 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구한다.

(i) 꽃과 초콜릿을 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우

㉠ 같은 종류의 초콜릿 2개를 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우

같은 종류의 초콜릿 2개를 1명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 3

같은 종류의 초콜릿 2개를 2명에게 한 개씩 나누어 주는 경우의 수는

${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

즉, 이 경우의 수는

$3+3=6$

㉡ 서로 다른 종류의 꽃 4송이를 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우

서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

㉠, ㉡에서 꽃과 초콜릿을 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$6\times81=486$

(2단계) 꽃과 초콜릿을 2명 이하의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구한다.

(ii) 꽃과 초콜릿을 1명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 3

(iii) 꽃과 초콜릿을 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우

3명 중 꽃과 초콜릿을 받는 2명을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

같은 종류의 초콜릿 2개를 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 2명에게 1개씩 나누어 주거나 1명에게 모두 주어야 하므로

$1+{}_2C_1=1+2=3$

서로 다른 종류의 꽃 4송이를 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_4=2^4=16$

2명 중 1명에게 꽃과 초콜릿을 모두 주는 경우의 수는 2

즉, 이 경우의 수는

$3\times(3\times16-2)=138$

(3단계) 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

이상에서 구하는 경우의 수는

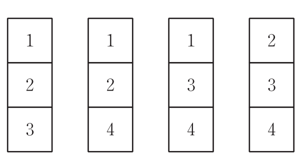
$486-(3+138)=345$

056

중복조합

(1단계) [그림 2]와 같은 타블로에서 열을 채우는 경우의 수를 구한다.

[그림 2]와 같은 타블로에서 아래로 가면 숫자가 커지도록 하나의 열을 채우는 경우는 다음 그림과 같이 4가지가 있다.



(2단계) 만들 수 있는 모든 타블로의 개수를 구한다.

오른쪽으로 가면 숫자가 커지거나 같으므로 이 4가지 열 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 순서대로 배열하면 타블로가 완성된다.

따라서 구하는 타블로의 개수는

${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3$

$=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

057

중복조합: 함수의 개수

(1단계) 조건 (나), (다)를 만족시키는 순서쌍 (a, b)를 구한다.

조건 (다)를 만족시키는 a, b에 대하여 $a<b$라 하자.

$a\in\{1, 2, 3\}$, $b\in\{1, 2, 3\}$이면 $f(a)>f(b)$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

즉, 가능한 순서쌍 (a, b)는

$(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$

이 중 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍은

$(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$

(2단계) 각 경우에 대한 함수 f의 개수를 구한다.

(i) $f(2)=5$, $f(5)=2$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 방법의 수는

${}_5C_1\times{}_1C_1=5\times1=5$

조건 (나)를 만족시키도록 $f(4)$의 값을 정하는 방법의 수는

${}_3C_1=3$

즉, 함수 f의 개수는

$5\times3=15$

(ii) $f(3)=4$, $f(4)=3$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 방법의 수는

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2$

$=\dfrac{5\times4}{2\times1}$

$=10$

조건 (나)에서

$f(5)=2$

즉, 함수 f의 개수는

$10\times1=10$

이때 $f(2)=5$, $f(5)=2$이고 $f(3)=4$, $f(4)=3$이면 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 (i)과 (ii)의 경우에서 중복되는 경우는 없다.

(iii) $f(3)=5$, $f(5)=3$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 방법의 수는

${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2$

$=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

조건 (나)를 만족시키도록 $f(4)$의 값을 정하는 방법의 수는

${}_2C_1=2$

즉, 함수 f의 개수는

$15\times2=30$

(iv) $f(4)=5$, $f(5)=4$인 경우

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 방법의 수는

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3$

$=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

(3단계) 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$15+10+30+35=90$

02 이항정리

유형 분석 기출

22쪽~23쪽

058 ④	059 6	060 ②	061 ②	062 ③
063 ③	064 2	065 ②	066 20	067 ②
068 ③	069 ③			

058

$(x-3y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\,x^{5-r}(-3y)^r={}_5C_r(-3)^r x^{5-r}y^r$

x^3y^2항은 $r=2$일 때이므로 x^3y^2의 계수는

${}_5C_2\times(-3)^2=10\times9=90$

059

$(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(x^2)^r={}_nC_r\,x^{2r}$

x^4항은 $2r=4$일 때이므로

$r=2$

이때 x^4의 계수가 15이므로

${}_nC_2=15$

$\dfrac{n(n-1)}{2}=15$

$n^2-n-30=0$

$(n+5)(n-6)=0$

$\therefore n=6$ ($\because$ n은 자연수)

060

$(x+2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r\,2^{n-r}x^r$

x^2항은 $r=2$일 때이므로

${}_nC_2\,2^{n-2}x^2$

x^3항은 $r=3$일 때이므로

${}_nC_3\,2^{n-3}x^3$

x^2의 계수와 x^3의 계수가 같으므로

${}_nC_2\,2^{n-2}={}_nC_3\,2^{n-3}$

$2{}_nC_2={}_nC_3$

$2\times\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$

양변을 $n(n-1)$로 나누면

$1=\dfrac{n-2}{6}$

$\therefore n=8$

061

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r\,x^{4-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\,\dfrac{x^{4-r}}{x^r}$ ⋯⋯ ㉠

이때

$(x^2+2x-3)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4+2x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$

이므로 이 전개식에서 상수항은 x^2과 ㉠의 $\dfrac{1}{x^2}$항, $2x$와 ㉠의 $\dfrac{1}{x}$항, -3과 ㉠의 상수항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠에서 $\dfrac{1}{x^2}$항은 $r-(4-r)=2$일 때이므로

$r=3$

따라서 ㉠의 $\dfrac{1}{x^2}$항은

${}_4C_3\times\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4}{x^2}$

(ii) ㉠에서 $\dfrac{1}{x}$항은 $r-(4-r)=1$일 때이므로

$r=\dfrac{5}{2}$

그런데 r은 $0\le r\le4$인 정수이므로 ㉠의 $\dfrac{1}{x}$항은 존재하지 않는다.

(iii) ㉠에서 상수항은 $4-r=r$일 때이므로

$r=2$

따라서 ㉠의 상수항은

${}_4C_2=6$

이상에서 구하는 상수항은

$x^2\times\dfrac{4}{x^2}+(-3)\times6=-14$

062

$(1-x)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r(-x)^r={}_7C_r(-1)^r x^r$

$(a+x)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_s\,a^{3-s}x^s$

따라서 $(1-x)^7(a+x)^3$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r(-1)^r x^r\times{}_3C_s\,a^{3-s}x^s={}_7C_r\times{}_3C_s(-1)^r a^{3-s}x^{r+s}$

이때 x^2항은

$r+s=2$ (r, s는 $0\le r\le7$, $0\le s\le3$인 정수)

일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

즉, x^2의 계수는

${}_7C_0\times{}_3C_2(-1)^0a^1+{}_7C_1\times{}_3C_1(-1)^1a^2+{}_7C_2\times{}_3C_0(-1)^2a^3$

$=3a-21a^2+21a^3$

이때 x^2의 계수가 3이므로

$3a-21a^2+21a^3=3$

$3(a-1)(7a^2+1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because$ a는 실수)

참고 이차방정식 $7a^2+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4\times7\times1=-28<0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

063

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-{}_nC_0$

$=2^n-1$

따라서 주어진 부등식에서

$500<2^n-1<1000$

$\therefore 501<2^n<1001$

이때 $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$n=9$

064

${}_{20}C_0-{}_{20}C_1+{}_{20}C_2-{}_{20}C_3+\cdots-{}_{20}C_{19}+{}_{20}C_{20}=0$이므로

${}_{20}C_0-({}_{20}C_1-{}_{20}C_2+{}_{20}C_3-\cdots+{}_{20}C_{19})+{}_{20}C_{20}=0$

$\therefore {}_{20}C_1-{}_{20}C_2+{}_{20}C_3-\cdots+{}_{20}C_{19}={}_{20}C_0+{}_{20}C_{20}$

$=1+1=2$

다른 풀이 ${}_{20}C_1-{}_{20}C_2+{}_{20}C_3-\cdots+{}_{20}C_{19}$

$=({}_{20}C_1+{}_{20}C_3+\cdots+{}_{20}C_{19})-({}_{20}C_2+{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{18})$

$=({}_{20}C_1+{}_{20}C_3+\cdots+{}_{20}C_{19})$

$-({}_{20}C_0+{}_{20}C_2+\cdots+{}_{20}C_{20})+({}_{20}C_0+{}_{20}C_{20})$

$=2^{20-1}-2^{20-1}+(1+1)$

$=2$

065

원소의 개수가

2인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_2$

4인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_4$

6인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_6$

8인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_8$

10인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_{10}$

이때 ${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^{10-1}=2^9$이므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^9-{}_{10}C_0$

$=512-1=511$

066

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

$\therefore f(n)=\dfrac{{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n}{3}$

$=\dfrac{2^n-1}{3}$

$f(n)$이 자연수가 되려면 2^n-1이 3의 배수이어야 하므로 가능한 한 자리 자연수 n의 값은

2, 4, 6, 8

따라서 구하는 모든 한 자리 자연수 n의 값의 합은

$2+4+6+8=20$

067

${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8$

$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8$ ($\because {}_2C_0={}_3C_0=1$)

$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8$

$={}_5C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8$

$\vdots$

$={}_{10}C_7+{}_{10}C_8$

$={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

1등급 비법

파스칼의 삼각형에서 각 단계의 첫 번째 또는 마지막 수인 1에서 시작하여 대각선 방향으로 배열된 n개의 수를 더한 값은 그 다음 단계의 n번째 수와 같다.

이를 파스칼의 삼각형에 표시하면 다음 그림과 같이 하키 스틱처럼 보인다고 하여 '하키 스틱 패턴'이라 한다.

${}_1C_0 \quad {}_1C_1$

${}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2$

${}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3$

${}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4$

$\vdots$

${}_{10}C_0 \quad {}_{10}C_1 \quad \cdots \quad {}_{10}C_8 \quad {}_{10}C_9 \quad {}_{10}C_{10}$

${}_{11}C_0 \quad {}_{11}C_1 \quad \cdots \quad {}_{11}C_8 \quad {}_{11}C_9 \quad {}_{11}C_{10} \quad {}_{11}C_{11}$

068

${}_5C_0+{}_6C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_{25}C_{20}$

$={}_6C_0+{}_6C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_{25}C_{20}$ ($\because {}_5C_0={}_6C_0=1$)

$={}_7C_1+{}_7C_2+\cdots+{}_{25}C_{20}$

$\vdots$

$={}_{25}C_{19}+{}_{25}C_{20}={}_{26}C_{20}$

$\therefore n=26$

069

다항식 $(x+1)^2+(x+1)^3+(x+1)^4+\cdots+(x+1)^{10}$의 전개식에서 x^2의 계수는

${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2$ ($\because {}_2C_2={}_3C_3=1$)

$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$={}_5C_3+{}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_2$

$\vdots$

$={}_{10}C_3+{}_{10}C_2={}_{11}C_3$

내신 적중 서술형 ● 24쪽

070 540 **071** (1) 2 (2) 60 **072** 21

073 $n=20$, $r=10$

070

$(x+3)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\,3^{5-r}x^r$ …… ㉮

x항은 $r=1$일 때이므로

${}_5C_1\,3^4x=405x$

x^2항은 $r=2$일 때이므로

${}_5C_2\,3^3x^2=270x^2$ …… ㉯

따라서 다항식 $(2x-1)(x+3)^5$의 전개식에서 x^2의 계수는

$2\times405+(-1)\times270=540$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $(x+3)^5$의 전개식의 일반항 구하기	30 %
㉯ $(x+3)^5$의 전개식에서 x항과 x^2항 구하기	40 %
㉰ $(2x-1)(x+3)^5$의 전개식에서 x^2의 계수 구하기	30 %

071

(1) $\left(ax-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(ax)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r(-1)^r a^{6-r}\frac{x^{6-r}}{x^r}$$ …… ㉮

상수항은 $6-r=r$일 때이므로 $r=3$

즉, 상수항은 ${}_6C_3(-1)^3a^3=-20a^3$

이때 상수항이 -160이므로

$-20a^3=-160$

$20(a-2)(a^2+2a+4)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 실수) …… ㉯

(2) $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 $\dfrac{1}{x^2}$항은 $r-(6-r)=2$일 때이므로

$r=4$

따라서 구하는 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수는

${}_6C_4\times(-1)^4\times2^2=15\times1\times4=60$ …… ㉰

채점 기준		배점 비율
(1)	㉮ $\left(ax-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항 구하기	30 %
	㉯ a의 값 구하기	40 %
(2)	㉰ $\dfrac{1}{x^2}$의 계수 구하기	30 %

참고 이차방정식 $a^2+2a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\times4=-3<0$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

072

${}_{10}C_1+3\times{}_{10}C_2+3^2\times{}_{10}C_3+\cdots+3^9\times{}_{10}C_{10}$

$=\dfrac{1}{3}(3\times{}_{10}C_1+3^2\times{}_{10}C_2+3^3\times{}_{10}C_3+\cdots+3^{10}\times{}_{10}C_{10})$

$=\dfrac{1}{3}\{(1+3)^{10}-1\}$

$=\dfrac{2^{20}-1}{3}$ …… ㉮

따라서 $a=20$, $b=1$이므로

$a+b=21$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 주어진 식을 간단히 하기	70 %
㉯ $a+b$의 값 구하기	30 %

참고 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$이므로

$${}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n=(1+x)^n-{}_nC_0$$
$$=(1+x)^n-1$$

073

$(1+x)^{10}(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^{10}의 계수는

${}_{10}C_0\times{}_{10}C_{10}+{}_{10}C_1\times{}_{10}C_9+{}_{10}C_2\times{}_{10}C_8+\cdots$

$+{}_{10}C_9\times{}_{10}C_1+{}_{10}C_{10}\times{}_{10}C_0$

$=({}_{10}C_0)^2+({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2+\cdots+({}_{10}C_{10})^2$ …… ㉮

$(1+x)^{10}(1+x)^{10}=(1+x)^{20}$이고

$(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^{10}의 계수는 ${}_{20}C_{10}$이므로

$({}_{10}C_0)^2+({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2+\cdots+({}_{10}C_{10})^2={}_{20}C_{10}$

$\therefore n=20$, $r=10$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ $(1+x)^{10}(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^{10}의 계수 구하기	60 %
㉯ 두 자연수 n, r의 값 구하기	40 %

1등급 비법

$(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수

$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$이므로 $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는

${}_nC_0\times{}_nC_n+{}_nC_1\times{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\times{}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n\times{}_nC_0$

이때 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

${}_nC_0\times{}_nC_n+{}_nC_1\times{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\times{}_nC_{n-2}+\cdots+{}_nC_n\times{}_nC_0$

$={}_nC_0\times{}_nC_0+{}_nC_1\times{}_nC_1+{}_nC_2\times{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n\times{}_nC_n$

$=({}_nC_0)^2+({}_nC_1)^2+({}_nC_2)^2+\cdots+({}_nC_n)^2$

1등급 실력 완성

• 25쪽

074 ② **075** ① **076** 221 **077** ④ **078** 71

074

이항정리

전략 $1+x+x^2+x^3$을 인수분해 하여 주어진 식의 전개식의 일반항을 구한다.

풀이 $1+x+x^2+x^3=(1+x)+x^2(1+x)$

$=(1+x)(1+x^2)$

그러므로

$(1+x+x^2+x^3)^5=\{(1+x)(1+x^2)\}^5$

$=(1+x)^5(1+x^2)^5$

$(1+x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\,x^r$

$(1+x^2)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_s\,(x^2)^s={}_5C_s\,x^{2s}$

따라서 $(1+x)^5(1+x^2)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\,x^r\times{}_5C_s\,x^{2s}={}_5C_r\times{}_5C_s\,x^{r+2s}$

x^6항은 $r+2s=6$ (r, s는 $0\le r\le5$, $0\le s\le5$인 정수)일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 3)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$

따라서 $(1+x+x^2+x^3)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는

${}_5C_0\times{}_5C_3+{}_5C_2\times{}_5C_2+{}_5C_4\times{}_5C_1=10+100+25$

$=135$

075

이항정리

전략 주어진 식의 전개식에서 x^8항이 나오는 경우를 찾아 n의 값을 먼저 구한다.

풀이 $(x^2+1)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r\,(x^2)^r={}_4C_r\,x^{2r}$

$(x^3+1)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_s\,(x^3)^s={}_nC_s\,x^{3s}$

따라서 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r\,x^{2r}\times{}_nC_s\,x^{3s}={}_4C_r\times{}_nC_s\,x^{2r+3s}$

x^8항은 $2r+3s=8$ (r, s는 $0\le r\le4$, $0\le s\le n$인 정수)일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(1, 2)$, $(4, 0)$

이때 x^8의 계수가 41이므로

${}_4C_1\times{}_nC_2+{}_4C_4\times{}_nC_0=41$에서

$4\times\dfrac{n(n-1)}{2}+1=41$

$n^2-n-20=0$

$(n+4)(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)

${}_4C_r\times{}_5C_s\,x^{2r+3s}$에서 x^3항은 $2r+3s=3$일 때이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(0, 1)$

따라서 구하는 x^3의 계수는

${}_4C_0\times{}_5C_1=5$

076

이항계수의 성질

전략 $21^{11}=(1+20)^{11}$임을 이용한다.

풀이 $21=1+20$이므로

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1\,x+{}_nC_2\,x^2+\cdots+{}_nC_n\,x^n$의 양변에 $x=20$, $n=11$을 대입하면

$(1+20)^{11}$

$={}_{11}C_0+{}_{11}C_1\times20+{}_{11}C_2\times20^2+\cdots+{}_{11}C_{11}\times20^{11}$

$={}_{11}C_0+{}_{11}C_1\times20+20^2({}_{11}C_2+{}_{11}C_3\times20+\cdots+{}_{11}C_{11}\times20^9)$

$=1+11\times20+400({}_{11}C_2+{}_{11}C_3\times20+\cdots+{}_{11}C_{11}\times20^9)$

$=221+400({}_{11}C_2+{}_{11}C_3\times20+\cdots+{}_{11}C_{11}\times20^9)$

이때 $400({}_{11}C_2+{}_{11}C_3\times20+\cdots+{}_{11}C_{11}\times20^9)$은 400의 배수이므로 21^{11}을 400으로 나누었을 때의 나머지는 221을 400으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는 221이다.

077

이항계수의 성질

전략 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$임을 이용한다.

풀이 $(1+32)^7={}_7C_0+{}_7C_1\times32+{}_7C_2\times32^2+\cdots+{}_7C_7\times32^7$에서 ${}_7C_0$, ${}_7C_7\times32^7$을 제외한 나머지 항은 모두 7의 배수이다.

이때

${}_7C_0+{}_7C_7\times32^7=32^7+1$

이고 오늘부터 32^7째 되는 날이 수요일이므로 $(1+32)^7$째 되는 날은 수요일의 다음 날인 목요일이다.

078

이항계수의 합

전략 $(1+3x)^n$의 전개식의 일반항을 이용하여 x^4의 계수를 구한 후 이항계수의 성질을 이용한다.

풀이 $(1+3x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r\,(3x)^r={}_nC_r\,3^rx^r$

이때 $4\le n\le9$인 경우에만 x^4항이 나오므로

$(1+3x)^4$의 전개식에서 x^4의 계수는

${}_4C_4\times3^4$

$(1+3x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는

${}_5C_4\times3^4$

$(1+3x)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는

${}_6C_4\times3^4$

$\vdots$

$(1+3x)^9$의 전개식에서 x^4의 계수는

${}_9C_4\times3^4$

따라서 x^4의 계수는

${}_4C_4\times3^4+{}_5C_4\times3^4+{}_6C_4\times3^4+{}_7C_4\times3^4+{}_8C_4\times3^4+{}_9C_4\times3^4$

$=3^4({}_5C_5+{}_5C_4+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4+{}_9C_4)$ ($\because {}_4C_4={}_5C_5=1$)

$=3^4({}_6C_5+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4+{}_9C_4)$

$=3^4({}_7C_5+{}_7C_4+{}_8C_4+{}_9C_4)$

$=3^4({}_8C_5+{}_8C_4+{}_9C_4)$

$=3^4({}_9C_5+{}_9C_4)$

$=3^4\times{}_{10}C_5$

이므로

$k=3^4=81$, $n=10$

$\therefore k-n=71$

도전 1등급 최고난도

● 26쪽

079 300 **080** ③ **081** 210

079

이항정리

(1단계) $x+1$을 한 문자로 보고 $(x^3+x+1)^{10}$을 전개한다.

$(x^3+x+1)^{10}$

$=\{x^3+(x+1)\}^{10}$

$={}_{10}C_0(x+1)^{10}+{}_{10}C_1(x+1)^9x^3+{}_{10}C_2(x+1)^8(x^3)^2+\cdots$

$+{}_{10}C_{10}(x^3)^{10}$

(2단계) x^4항이 나오는 경우를 생각해 본다.

이때

${}_{10}C_2(x+1)^8(x^3)^2+{}_{10}C_3(x+1)^7(x^3)^3+{}_{10}C_4(x+1)^6(x^3)^4+\cdots$

$+{}_{10}C_{10}(x^3)^{10}$

은 6차 이상의 항만 나오므로 x^4항은

${}_{10}C_0(x+1)^{10}+{}_{10}C_1(x+1)^9x^3$의 전개식에서 구할 수 있다.

(3단계) x^4의 계수를 구한다.

$(x+1)^9x^3$의 전개식의 일반항은

${}_9C_r x^r\times x^3={}_9C_r x^{r+3}$

x^4항은 $r+3=4$일 때이므로

$r=1$

따라서 ${}_{10}C_0(x+1)^{10}+{}_{10}C_1(x+1)^9x^3$의 전개식에서 x^4의 계수는

${}_{10}C_0\times{}_{10}C_4+{}_{10}C_1\times{}_9C_1=210+90$

$=300$

다른 풀이 $(x^3+x+1)^{10}$

$=(x^3+x+1)(x^3+x+1)(x^3+x+1)\times\cdots$

$\times(x^3+x+1)$

의 전개식에서 x^4이 만들어지는 경우는 10개의 다항식 x^3+x+1 중에서 x^3항을 1개, x항을 1개, 1을 8개 택하는 경우와 x^3항을 0개, x항을 4개, 1을 6개 택하는 경우이다.

따라서 구하는 x^4의 계수는

${}_{10}C_1\times{}_9C_1\times{}_8C_8+{}_{10}C_0\times{}_{10}C_4\times{}_6C_6=90+210$

$=300$

080

이항계수의 성질

(1단계) 구하는 부분집합의 개수를 조합의 수를 이용하여 나타낸다.

집합 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 24\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 4의 배수인 집합의 개수는

${}_{24}C_4+{}_{24}C_8+{}_{24}C_{12}+\cdots+{}_{24}C_{24}$

(2단계) $(1+i)^{24}$의 전개식을 이용하여 ${}_{24}C_0-{}_{24}C_2+{}_{24}C_4-{}_{24}C_6+\cdots+{}_{24}C_{24}$의 값을 구한다.

$(1+i)^{24}$

$={}_{24}C_0+{}_{24}C_1 i+{}_{24}C_2 i^2+{}_{24}C_3 i^3+\cdots+{}_{24}C_{24} i^{24}$

$=({}_{24}C_0-{}_{24}C_2+{}_{24}C_4-{}_{24}C_6+\cdots+{}_{24}C_{24})$

$+({}_{24}C_1-{}_{24}C_3+{}_{24}C_5-{}_{24}C_7+\cdots-{}_{24}C_{23})i$

이때 $(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=-4$이므로

$(1+i)^{24}=\{(1+i)^4\}^6=(-4)^6=2^{12}$

$\therefore {}_{24}C_0-{}_{24}C_2+{}_{24}C_4-{}_{24}C_6+\cdots+{}_{24}C_{24}=2^{12}$ …… ㉠

(3단계) 원소의 개수가 4의 배수인 집합의 개수를 구한다.

${}_{24}C_0+{}_{24}C_2+{}_{24}C_4+{}_{24}C_6+\cdots+{}_{24}C_{24}=2^{23}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2({}_{24}C_0+{}_{24}C_4+{}_{24}C_8+{}_{24}C_{12}+\cdots+{}_{24}C_{24})=2^{23}+2^{12}$

$\therefore {}_{24}C_0+{}_{24}C_4+{}_{24}C_8+{}_{24}C_{12}+\cdots+{}_{24}C_{24}=2^{22}+2^{11}$

따라서 구하는 집합의 개수는

${}_{24}C_4+{}_{24}C_8+{}_{24}C_{12}+\cdots+{}_{24}C_{24}=2^{22}+2^{11}-1$

081

이항계수의 합 ⊕ 중복조합

(1단계) 구하는 방법의 수를 중복조합의 수를 이용하여 나타낸다.

빨간색, 파란색, 노란색, 초록색 펜의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면 구하는 방법의 수는

$a+b+c+d\le 10$

을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같다.

이때

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$

(a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)\le 10$

$\therefore a'+b'+c'+d'\le 6$

즉, 구하는 방법의 수는 $a'+b'+c'+d'\le 6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같으므로

${}_4H_0+{}_4H_1+{}_4H_2+\cdots+{}_4H_6$

(2단계) 조건을 만족시키는 방법의 수를 구한다.

따라서 구하는 방법의 수는

${}_4H_0+{}_4H_1+{}_4H_2+\cdots+{}_4H_6$

$={}_3C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+\cdots+{}_9C_6$

$={}_4C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+\cdots+{}_9C_6$ $(\because {}_3C_0={}_4C_0=1)$

$={}_5C_1+{}_5C_2+\cdots+{}_9C_6$

$\vdots$

$={}_9C_5+{}_9C_6$

$={}_{10}C_6={}_{10}C_4$

$=210$

II 확률

03 확률의 개념과 활용

유형 분석 기출

● 30쪽 ~ 37쪽

082 ③	083 ㄴ	084 ②	085 ①	086 60
087 ②	088 $\frac{13}{18}$	089 ③	090 ②	091 ⑤
092 ②	093 ③	094 ⑤	095 $\frac{1}{5}$	096 ④
097 $\frac{5}{16}$	098 ①	099 $\frac{4}{7}$	100 ④	101 ①
102 ③	103 ②	104 C	105 $\frac{1}{3}$	106 ④
107 $\frac{7}{12}$	108 ⑤	109 ④	110 ①, ②	111 ③
112 ①	113 ③	114 0.7	115 ⑤	116 ①
117 ④	118 ③	119 ③	120 8	121 ④
122 ①	123 ⑤			

082

표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이고

$A=\{5, 7, 9\}$, $B=\{3, 6, 9\}$

② $A\cup B=\{3, 5, 6, 7, 9\}$

④ $A^C=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$이므로

$n(A^C)=6$

⑤ $A\cap B^C=\{5, 7\}$이므로

$n(A\cap B^C)=2$

따라서 옳은 것은 ③이다.

다른 풀이 ④ $n(A)=3$이므로 $n(A^C)=9-3=6$

083

표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{1, 5\}$

$\therefore A\cap B=\{2\}$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\{5\}$

따라서 사건 A와 사건 C는 서로 배반사건이므로 서로 배반사건인 것은 ㄴ뿐이다.

084

사건 A와 배반인 사건은 사건 A^C의 부분집합이고, 사건 B^C와 배반인 사건은 사건 B의 부분집합이므로 두 사건 A, B^C와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B$의 부분집합이다.

따라서 $A^C\cap B=B-A=\{1, 13\}$이므로 사건 C의 개수는

$2^2=4$

개념 보충

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여 집합 A의 부분집합의 개수는

$$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{n\text{개}}=2^n$$

085

1부터 n까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 정n면체 3개를 던지는 시행에서 나오는 모든 경우의 수는 n^3이고, 동전 1개를 던지는 시행에서 나오는 모든 경우의 수는 2이다.

이때 표본공간의 원소의 개수가 128이므로

$2n^3=128$

$n^3=64$ $\quad\therefore n=4$ ($\because$ n은 자연수)

086

표본공간을 S라 하면 $S=\{2, 3, 4, \cdots, 20\}$이고

$B=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$,

$C=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$이므로

$B\cap C=\{2, 3, 5, 7\}$

사건 A_n과 사건 $B\cap C$가 서로 배반사건이 되려면 n은 2, 3, 5, 7의 배수가 모두 아니어야 하므로 n의 값은 11, 13, 17, 19이다.

따라서 구하는 모든 n의 값의 합은

$11+13+17+19=60$

087

$720=2^4\times3^2\times5$이므로 720의 양의 약수의 개수는

$(4+1)\times(2+1)\times(1+1)=30$

이때 720의 양의 약수 중에서 140의 약수는 720과 140의 양의 공약수와 같다.

$140=2^2\times5\times7$이므로 720과 140의 최대공약수는

$2^2\times5$

즉, 720과 140의 양의 공약수의 개수는

$(2+1)\times(1+1)=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

088

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

이차방정식 $ax^2-8x+b=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-ab\ge0$ $\quad\therefore ab\le16$

주사위의 눈의 수 a, b가 $ab\le16$을 만족시키는 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$,

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(2, 6)$,

$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5),$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3),$
$(6, 1), (6, 2)$
의 26가지이다.
따라서 구하는 확률은
$\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$

다른 풀이 주사위의 눈의 수 a, b가 $ab>16$을 만족시키는 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면
$(6, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (5, 6), (5, 5), (5, 4),$
$(4, 6), (4, 5), (3, 6)$
의 10가지이므로 그 확률은
$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$
따라서 구하는 확률은
$1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$

089
두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
원 $(x-a)^2+y^2=b^2$의 중심의 좌표는 $(a, 0)$이고 반지름의 길이는 b이므로 원과 직선 $x=-2$가 만나려면
$b\geq a+2$
주사위의 눈의 수 a, b가 위의 부등식을 만족시키는 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면
$(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
$(2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 5), (3, 6),$
$(4, 6)$
의 10가지이다.
따라서 구하는 확률은
$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

090
6권의 책을 일렬로 꽂는 경우의 수는
$6!=720$
소설책 4권을 한 권으로 생각하여 총 3권을 일렬로 꽂는 경우의 수는
$3!=6$
이고, 소설책 4권의 자리를 바꾸는 경우의 수는
$4!=24$
이므로 소설책끼리 이웃하여 꽂는 경우의 수는
$6\times24=144$
따라서 구하는 확률은
$\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

091
7명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는
${}_7C_3=35$
경아는 대표로 뽑히고 예솔이는 대표로 뽑히지 않는 경우의 수는 경아와 예솔이를 제외한 나머지 5명 중에서 2명의 대표를 뽑고 경아를 포함시키는 경우의 수와 같으므로
${}_5C_2=10$
따라서 구하는 확률은
$\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$

1등급 비법
서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수는 $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 뽑는 방법의 수와 같으므로 ${}_{n-k}C_{r-k}$이다.

092
만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
${}_4\Pi_3=4^3=64$
세 자리 자연수가 짝수가 되려면 일의 자리의 숫자가 2이어야 하므로 짝수인 세 자리 자연수의 개수는
${}_4\Pi_2=4^2=16$
따라서 구하는 확률은
$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$

093
3명의 학생이 5개의 방과후 체육 활동 중 한 가지를 택하는 경우의 수는
${}_5\Pi_3=5^3=125$
3명의 학생이 서로 다른 방과후 체육 활동을 택하는 경우의 수는
${}_5P_3=60$
따라서 구하는 확률은
$\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$

094
상자에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n이라 하면
$\frac{{}_nC_2}{{}_{15}C_2}=\frac{4}{15}$
$\frac{n(n-1)}{15\times14}=\frac{4}{15}$
$n(n-1)=56=8\times7$
$\therefore n=8$
따라서 상자에 들어 있는 당첨 제비의 개수는 8이다.

095
5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는
$5!=120$

여학생끼리는 이웃하고 1학년 남학생과 3학년 남학생은 이웃하지 않는 경우의 수는 여학생 2명을 한 명으로 생각하고 이 묶음과 2학년 남학생을 배열한 후 1학년 남학생과 3학년 남학생이 이웃하지 않도록 여학생 묶음과 2학년 남학생 사이, 그리고 양 끝의 3곳에 각각 배열하는 경우의 수와 같으므로

$2!\times 2!\times {}_3P_2=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

096

$(n+3)$개의 탁구공 중에서 2개의 탁구공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{n+3}C_2$

꺼낸 탁구공이 모두 흰색일 확률은

$\frac{{}_nC_2}{{}_{n+3}C_2}=\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$

꺼낸 탁구공이 모두 주황색일 확률은

$\frac{{}_3C_2}{{}_{n+3}C_2}=\frac{6}{(n+3)(n+2)}$

이때 $\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}=2\times\frac{6}{(n+3)(n+2)}$이므로

$\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}=\frac{12}{(n+3)(n+2)}$

$n(n-1)=12=4\times 3$

$\therefore\ n=4$

097

집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

조건을 만족시키는 함수는 집합 Y의 원소 4개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후, 작거나 같은 수부터 차례대로 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 그 개수는

${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$

098

초코 우유, 딸기 우유, 바나나 우유, 커피 우유 중에서 9개를 택하는 방법의 수는

${}_4H_9={}_{4+9-1}C_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=220$

바나나 우유를 하나도 택하지 않는 방법의 수는 초코 우유, 딸기 우유, 커피 우유 중에서 9개를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

따라서 구하는 확률은

$\frac{55}{220}=\frac{1}{4}$

099

정육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 서로 다른 두 꼭짓점을 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

이 중에서 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우는 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{3}$이다.

(i) 선분의 길이가 $\sqrt{2}$인 경우의 수는 각 면의 대각선의 개수의 총합과 같으므로

$2\times 6=12$

(ii) 선분의 길이가 $\sqrt{3}$인 경우의 수는 정육면체의 대각선의 개수와 같으므로 4

(i), (ii)에서 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우의 수는

$12+4=16$

따라서 구하는 확률은

$\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$

100

10개의 공 중에서 6개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_6={}_{10}C_4=210$

꺼낸 6개의 공에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우는 홀수가 적힌 공을 홀수 개 뽑는 경우이다.

(i) 홀수가 적힌 공 1개, 짝수가 적힌 공 5개를 뽑는 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_5C_5=5$

(ii) 홀수가 적힌 공 3개, 짝수가 적힌 공 3개를 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3\times{}_5C_3={}_5C_2\times{}_5C_2=100$

(iii) 홀수가 적힌 공 5개, 짝수가 적힌 공 1개를 뽑는 경우의 수는

${}_5C_5\times{}_5C_1=5$

이상에서 꺼낸 6개의 공에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우의 수는

$5+100+5=110$

따라서 구하는 확률은

$\frac{110}{210}=\frac{11}{21}$

101

서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times 6\times 6=216$

한 개의 주사위의 눈의 수가 다른 두 개의 주사위의 눈의 수의 곱이 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면

$(1, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 4, 4)$, $(1, 5, 5)$, $(1, 6, 6)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 3, 6)$

(i) $(1, 1, 1)$인 경우의 수는 1

(ii) $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 4, 4)$, $(1, 5, 5)$, $(1, 6, 6)$, $(2, 2, 4)$인 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\times 6=18$

(iii) $(2, 3, 6)$인 경우의 수는 $3!=6$

이상에서 한 개의 주사위의 눈의 수가 다른 두 개의 주사위의 눈의 수의 곱이 되는 경우의 수는

$1+18+6=25$

따라서 구하는 확률은 $\frac{25}{216}$

102

빨간 구슬이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{3}{3+5+n}=\frac{1}{6}$

$n+8=18 \qquad \therefore n=10$

103

3단계까지 통과한 사람은 65520명이고 5단계까지 통과한 사람은 15600명이므로

$p=\frac{15600}{65520}=\frac{5}{21}$

$\therefore 42p=42\times\frac{5}{21}=10$

104

A, B, C, D, E가 각각 윷을 한 번씩 던질 때, 걸이 나올 확률은 다음과 같다.

A: $\frac{43}{100}$, B: $\frac{21}{50}$, C: $\frac{12}{25}$, D: $\frac{87}{200}$, E: $\frac{45}{100}$

$\frac{21}{50}<\frac{43}{100}<\frac{87}{200}<\frac{45}{100}<\frac{12}{25}$이므로 걸이 나올 확률이 가장 큰 학생은 C이다.

105

과녁 전체의 넓이는 반지름의 길이가 3인 원의 넓이와 같으므로

$\pi\times3^2=9\pi$

색칠한 부분의 넓이는

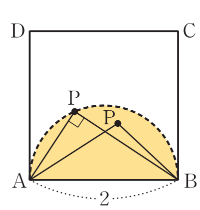
$\pi\times2^2-\pi\times1^2=3\pi$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3\pi}{9\pi}=\frac{1}{3}$

106

점 P가 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때 $\triangle$PAB는 직각삼각형이 되므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 $\triangle$PAB는 둔각삼각형이 된다.

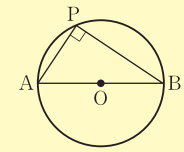


따라서 구하는 확률은

$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}=\frac{\pi\times1^2\times\frac{1}{2}}{2^2}=\frac{\pi}{8}$

1등급 비법

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 원의 지름의 양 끝 점과 원 위의 다른 한 점을 택하면 직각삼각형을 만들 수 있다.



107

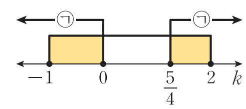
이차방정식 $x^2-4kx+5k=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5k\geq0$

$4k^2-5k\geq0,\ k(4k-5)\geq0$

$\therefore k\leq0$ 또는 $k\geq\frac{5}{4}$ ...... ㉠

이때 주어진 조건 $-1\leq k\leq2$와 ㉠의 공통 범위를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-1\leq k\leq0$ 또는 $\frac{5}{4}\leq k\leq2$ ...... ㉡

따라서 구하는 확률은

$\frac{(\text{㉡의 구간의 길이})}{(\text{전체 구간의 길이})}=\frac{\{0-(-1)\}+\left(2-\frac{5}{4}\right)}{2-(-1)}=\frac{7}{12}$

개념 보충

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 실수)의 판별식을 D라 할 때,

① $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근을 갖는다.

③ $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

108

표본공간 $S=\{2, 4, 6, 8, 10\}$의 원소 중에서 홀수는 존재하지 않으므로 $\mathrm{P}(A)=0$

또, 표본공간 S의 모든 원소는 2의 배수이므로 $\mathrm{P}(B)=1$

$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$

109

ㄱ. 소수는 3, 5, 7, 11, 13이므로 소수가 나오는 사건이 일어날 확률은 $\frac{5}{6}$이다.

ㄴ. 4의 배수는 없으므로 4의 배수가 나오는 사건이 일어날 확률은 0이다.

ㄷ. 16의 약수는 없으므로 16의 약수가 나오는 사건이 일어날 확률은 0이다.

이상에서 확률이 0인 사건은 ㄴ, ㄷ이다.

110

① $\mathrm{P}(S)=1,\ \mathrm{P}(\varnothing)=0$이므로

$\mathrm{P}(S)+\mathrm{P}(\varnothing)=1$

② $\varnothing \subset (A\cap B) \subset S$이므로 $P(\varnothing) \le P(A\cap B) \le P(S)$

$\therefore 0 \le P(A\cap B) \le 1$

③ $0 \le P(A) \le 1$, $0 \le P(B) \le 1$이므로

$0 \le P(A)+P(B) \le 2$

④ [반례] $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{5, 6\}$이면 $A\cup B=S$이지만

$P(A)=\frac{5}{6}$, $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

이므로 $P(A)+P(B)=\frac{7}{6}$

$\therefore P(A)+P(B) \ne 1$

⑤ [반례] $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{4, 5, 6\}$이면

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

이므로 $P(A)+P(B)=1$이지만

$A\cap B=\{5\} \ne \varnothing$

즉, 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 옳은 것은 ①, ②이다.

111

$S=A\cup B$이므로 $P(A\cup B)=1$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$1=P(A)+\frac{4}{7}$

$\therefore P(A)=\frac{3}{7}$

112

$P(A\cap B)=\frac{2}{3}P(A)=\frac{2}{5}P(B)$에서

$P(B)=\frac{5}{3}P(A)$이므로

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+\frac{5}{3}P(A)-\frac{2}{3}P(A)\\&=2P(A)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}=\frac{2P(A)}{\frac{2}{3}P(A)}=3$$

113

꺼낸 공이 모두 흰 공인 사건을 A, 모두 검은 공인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$, $P(B)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)\\&=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

114

택한 한 명의 학생이 음악을 좋아하는 학생인 사건을 A, 체육을 좋아하는 학생인 사건을 B라 하면

$P(A)=0.35$, $P(B)=0.6$, $P(A\cap B)=\frac{40}{160}=0.25$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=0.35+0.6-0.25=0.7\end{aligned}$$

115

6장의 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $6!$

a와 b가 적힌 카드를 이웃하여 나열하는 사건을 A, b와 c가 적힌 카드를 이웃하여 나열하는 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 a, b, c가 적힌 카드를 a, b, c 또는 c, b, a 순으로 나열하는 사건이므로

$P(A)=\frac{5!\times 2}{6!}=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{5!\times 2}{6!}=\frac{1}{3}$,

$P(A\cap B)=\frac{4!\times 2}{6!}=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{15}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

116

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(A^C\cap B^C)&=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)\\&=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

117

$P(A)=\frac{2}{5}$에서

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

$3P(B)=\frac{2}{5}$에서 $P(B)=\frac{2}{15}$

이때 두 사건 A^C, B는 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned}P(A^C\cup B)&=P(A^C)+P(B)\\&=\frac{3}{5}+\frac{2}{15}=\frac{11}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(A\cap B^C)&=P((A^C\cup B)^C)=1-P(A^C\cup B)\\&=1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}\end{aligned}$$

118

뽑힌 4명의 대표 중에서 적어도 한 명이 남학생인 사건을 A라 하면 A^C는 4명이 모두 여학생인 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_5C_4}{{}_9C_4}=\frac{5}{126}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{126}=\frac{121}{126}$

119

뽑은 2명의 대표 중에서 적어도 한 명이 여학생일 확률이 $\frac{13}{24}$이므로 2명 모두 여학생이 아닐 확률은

$1-\frac{13}{24}=\frac{11}{24}$

즉, $\frac{{}_{16-n}C_2}{{}_{16}C_2}=\frac{11}{24}$이므로

$\frac{(16-n)(15-n)}{240}=\frac{11}{24}$

$(16-n)(15-n)=110$, $n^2-31n+130=0$

$(n-5)(n-26)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n<16$)

120

지애와 정아 사이에 적어도 한 명의 학생을 세우는 사건을 A라 하면 A^C는 지애와 정아를 이웃하게 세우는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{4!\times2!}{5!}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

이므로 $p=5$, $q=3$

$\therefore p+q=5+3=8$

121

3문제 이하로 맞히는 사건을 A라 하면 A^C는 4문제를 맞히거나 모두 맞히는 사건이다.

(i) 4문제를 맞힐 확률은 $\frac{{}_5C_4}{{}_2\Pi_5}=\frac{5}{2^5}=\frac{5}{32}$

(ii) 모두 맞힐 확률은 $\frac{{}_5C_5}{{}_2\Pi_5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

(i), (ii)에서

$P(A^C)=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$

122

A가 문제를 맞히는 사건을 A, B가 문제를 맞히는 사건을 B라 하면 두 명 중에서 한 명만 문제를 맞힐 확률이 0.6이므로

$P(A\cup B)-P(A\cap B)=0.6$

이때 $P(A\cap B)=0.3$이므로

$P(A\cup B)-0.3=0.6$ $\quad\therefore P(A\cup B)=0.9$

따라서 구하는 확률은

$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$

$=1-0.9=0.1$

123

1부터 11까지의 자연수 중에서 서로 다른 2개의 수를 선택하는 경우의 수는

${}_{11}C_2=55$

선택한 2개의 수 중 적어도 하나가 7 이상의 홀수인 사건을 A라 하면 A^C는 7, 9, 11을 제외한 8개의 수 중에서 2개를 선택하는 사건이므로 그 경우의 수는

${}_8C_2=28$ $\quad\therefore P(A^C)=\frac{28}{55}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{28}{55}=\frac{27}{55}$

다른 풀이 (i) 선택한 2개의 수 중에서 7 이상의 홀수가 1개인 경우

7, 9, 11 중에서 1개를 선택하고, 7, 9, 11을 제외한 8개의 수 중에서 나머지 1개를 선택해야 하므로 이 경우의 확률은

$\frac{{}_3C_1\times{}_8C_1}{{}_{11}C_2}=\frac{24}{55}$

(ii) 선택한 2개의 수 모두 7 이상의 홀수인 경우

7, 9, 11 중에서 2개를 선택해야 하므로 이 경우의 확률은

$\frac{{}_3C_2}{{}_{11}C_2}=\frac{3}{55}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{24}{55}+\frac{3}{55}=\frac{27}{55}$

내신 적중 서술형

38쪽

124 $\frac{5}{12}$ **125** $\frac{1}{5}$ **126** $\frac{15}{64}$ **127** (1) 5 (2) $\frac{31}{36}$

124

세 명이 각각 주사위를 한 개씩 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$ ······ ㉮

같은 눈의 수가 나오는 주사위 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

같은 눈의 수 2개와 다른 눈의 수 1개를 정하는 경우의 수는

${}_6P_2=30$

즉, 같은 눈의 수가 나온 주사위가 2개인 경우의 수는

$3\times30=90$ ······ ㉯

따라서 구하는 확률은

$\frac{90}{216}=\frac{5}{12}$ ······ ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 모든 경우의 수 구하기	30 %
㉯ 같은 눈의 수가 나온 주사위가 2개인 경우의 수 구하기	50 %
㉰ 같은 눈의 수가 나온 주사위가 2개일 확률 구하기	20 %

125

6개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times3!}=60$ …… ㉮

숫자 1, 3, 3, 3을 하나의 숫자로 생각하여 총 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

숫자 1, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

즉, 홀수끼리 모두 이웃하는 경우의 수는

$3\times4=12$ …… ㉯

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	30 %
㉯ 홀수끼리 모두 이웃하는 경우의 수 구하기	50 %
㉰ 홀수끼리 모두 이웃할 확률 구하기	20 %

126

집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는 ${}_8\Pi_5$

$f(3)=5$인 사건을 A, $f(5)=7$인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_8\Pi_4}{{}_8\Pi_5}=\dfrac{8^4}{8^5}=\dfrac{1}{8}$

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_8\Pi_4}{{}_8\Pi_5}=\dfrac{8^4}{8^5}=\dfrac{1}{8}$ …… ㉮

$f(3)=5$이고 $f(5)=7$이려면 $f(3)=5$, $f(5)=7$로 정한 후 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$의 값만 정하면 되므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{{}_8\Pi_3}{{}_8\Pi_5}=\dfrac{8^3}{8^5}=\dfrac{1}{64}$ …… ㉯

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{64}=\dfrac{15}{64}$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $f(3)=5$일 확률과 $f(5)=7$일 확률을 각각 구하기	40 %
㉯ $f(3)=5$이고 $f(5)=7$일 확률 구하기	30 %
㉰ $f(3)=5$이거나 $f(5)=7$일 확률 구하기	30 %

127

(1) $|a|=|xy|\geq10$을 만족시키는 경우를 순서쌍 (x, y)로 나타내면

$(4, 3)$, $(4, -3)$, $(4, -4)$, $(3, -4)$, $(-3, -4)$

의 5가지이다. …… ㉮

(2) 집합 A의 9개의 원소 중에서 임의로 서로 다른 두 원소를 택하는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_2=36$

$|a|<10$인 사건을 X라 하면 X^C는 $|a|\geq10$인 사건이므로

$\mathrm{P}(X^C)=\dfrac{5}{36}$ …… ㉯

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X)=1-\mathrm{P}(X^C)$

$=1-\dfrac{5}{36}=\dfrac{31}{36}$ …… ㉰

	채점 기준	배점 비율
(1)	㉮ $\lvert a\rvert\geq10$을 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수 구하기	40 %
(2)	㉯ $\lvert a\rvert\geq10$일 확률 구하기	30 %
	㉰ $\lvert a\rvert<10$일 확률 구하기	30 %

1등급 실력 완성

39쪽~40쪽

128 231 **129** $\dfrac{3}{8}$ **130** ④ **131** 51

132 $1-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$ **133** ② **134** $\dfrac{13}{28}$ **135** $\dfrac{5}{9}$

136 ② **137** ③

128

시행과 사건

전략 $0<\mathrm{P}(A)<\mathrm{P}(B)$를 만족시키는 $n(A)$의 값에 따른 $n(B)$의 값을 구한다.

풀이 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$, $n(A)+n(B)\leq6$

이때 $0<\mathrm{P}(A)<\mathrm{P}(B)$이므로 $0<n(A)<n(B)$

$\therefore$ $n(A)=1$ 또는 $n(A)=2$

(i) $n(A)=1$이면 $1<n(B)\leq5$에서

$n(B)=2$ 또는 $n(B)=3$ 또는 $n(B)=4$ 또는 $n(B)=5$

즉, 두 사건 A, B를 선택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_1\times({}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_5)=156$

(ii) $n(A)=2$이면 $2<n(B)\leq4$에서

$n(B)=3$ 또는 $n(B)=4$

즉, 두 사건 A, B를 선택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_2\times({}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_4)=75$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$156+75=231$

129

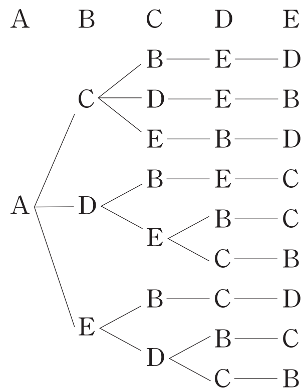
수학적 확률 + 순열과 조합을 이용하는 확률

전략 수형도를 이용하여 한 학생만 자신의 성적표를 택하는 경우의 수를 구한다.

풀이 5명의 학생이 5장의 성적표 중에서 한 장씩 택하는 모든 경우의 수는

$5!=120$

5명의 학생을 A, B, C, D, E라 하면 A학생만 자신의 성적표를 택하고 나머지 네 학생은 다른 학생의 성적표를 택하는 경우는 다음과 같이 9가지이다.



같은 방법으로 학생 B, C, D, E가 각각 자신의 성적표를 택하고 나머지 네 학생은 다른 학생의 성적표를 택하는 경우도 각각 9가지씩이다.
즉, 한 학생만 자신의 성적표를 택하는 경우의 수는
$9\times5=45$
따라서 구하는 확률은
$\frac{45}{120}=\frac{3}{8}$

1등급 비법

규칙성을 찾기 어려운 경우의 수를 구할 때 수형도를 이용하면 중복되지 않고 빠짐없이 모든 경우를 구할 수 있다.

130

순열과 조합을 이용하는 확률

전략 $f(2)=2$이고 $f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)$가 4의 배수이므로 $f(1)\times f(3)\times f(4)$는 짝수임을 이용한다.

풀이 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$로의 모든 일대일함수 f의 개수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_7P_4=840$
조건 (가)에서 $f(2)=2$이고 조건 (나)에서
$f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)$가 4의 배수이므로 $f(1)\times f(3)\times f(4)$는 짝수이다. 즉, $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값 중에서 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

(i) $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값 중에서 짝수가 1개인 경우
$f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값 중에서 짝수가 될 수 1개를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1$이고, 이 각각에 대하여 짝수는 4 또는 6이므로 경우의 수는
${}_3C_1\times2=6$
나머지 두 개의 함숫값을 홀수로 정하는 경우의 수는
${}_4P_2=12$
즉, 함수 f의 개수는
$6\times12=72$

(ii) $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값 중에서 짝수가 2개인 경우
$f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값 중에서 짝수 4, 6이 될 수 2개를 정하는 경우의 수는
${}_3P_2=6$
나머지 한 개의 함숫값을 홀수로 정하는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
즉, 함수 f의 개수는
$6\times4=24$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$72+24=96$
따라서 구하는 확률은
$\frac{96}{840}=\frac{4}{35}$

다른 풀이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 $f(2)=2$인 일대일함수의 개수에서 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 모두 홀수인 함수 f의 개수를 빼면 된다.
$f(2)=2$인 일대일함수 f의 개수는 집합 X의 원소 1, 3, 4에 집합 Y에서 2를 제외한 나머지 6개의 원소 중 3개의 원소를 택하여 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_6P_3=120$
이 중에서 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 모두 홀수인 함수 f의 개수는 집합 X의 원소 1, 3, 4에 집합 Y의 홀수인 4개의 원소 중 3개의 원소를 택하여 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_4P_3=24$
즉, 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$120-24=96$
따라서 구하는 확률은
$\frac{96}{840}=\frac{4}{35}$

131

순열과 조합을 이용하는 확률

전략 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색인 경우와 서로 같은 색인 경우로 나누어 경우의 수를 구한다.

풀이 8개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는
${}_8C_2=28$

(i) 꺼낸 두 공이 서로 다른 색인 경우
꺼낸 두 공이 서로 다른 색이면 12를 점수로 얻고, 이 점수는 24 이하의 짝수이므로 경우의 수는
${}_4C_1\times{}_4C_1=16$

(ii) 꺼낸 두 공이 서로 같은 색인 경우
㉠ 꺼낸 두 공이 모두 흰 공인 경우
꺼낸 두 흰 공에 적힌 수의 곱이 짝수이면 점수는 항상 24 이하의 짝수이므로 경우의 수는
${}_4C_2-{}_2C_2=5$
㉡ 꺼낸 두 공이 모두 검은 공인 경우
꺼낸 두 검은 공에 적힌 수의 곱이 짝수이고, 점수가 24 이하의 짝수가 되려면 꺼낸 두 검은 공에 적힌 수가 4와 5 또는 4와 6이어야 하므로 경우의 수는 2

㉠, ㉡에서 꺼낸 두 공이 서로 같은 색이면서 얻은 점수가 24 이하의 짝수인 경우의 수는

$5+2=7$

(ⅰ), (ⅱ)에서 이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수인 경우의 수는

$16+7=23$

이므로 구하는 확률은 $\frac{23}{28}$

따라서 $p=28$, $q=23$이므로

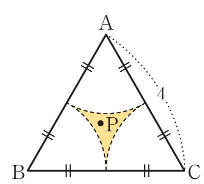
$p+q=28+23=51$

132

기하적 확률

전략 각 꼭짓점까지의 거리가 2인 점 P의 위치를 찾는다.

풀이 점 P가 정삼각형의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 부채꼴의 호 위에 있을 때 점 P에서 그 꼭짓점까지의 거리가 2이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 각 꼭짓점까지의 거리가 2보다 크다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\triangle\text{ABC의 넓이})}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2-3\left(\pi\times2^2\times\frac{60}{360}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2}$$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

133

확률의 기본 성질 + 확률의 덧셈정리

전략 확률의 기본 성질과 확률의 덧셈정리를 이용하여 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 범위를 구한다.

풀이 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{7}-\mathrm{P}(A\cup B)$$

$$=\frac{33}{28}-\mathrm{P}(A\cup B) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최소일 때 $\mathrm{P}(A\cap B)$는 최대이고 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대일 때 $\mathrm{P}(A\cap B)$는 최소이다.

이때

$\mathrm{P}(A\cup B)\ge\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cup B)\le1$

이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)\ge\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge\frac{3}{7}$, $\mathrm{P}(A\cup B)\le1$

따라서 $\frac{3}{4}\le\mathrm{P}(A\cup B)\le1$이므로

$-1\le-\mathrm{P}(A\cup B)\le-\frac{3}{4}$

$\frac{5}{28}\le\frac{33}{28}-\mathrm{P}(A\cup B)\le\frac{3}{7}$

$\therefore \frac{5}{28}\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{3}{7}$ ($\because$ ㉠)

즉, $M=\frac{3}{7}$, $m=\frac{5}{28}$이므로

$M+m=\frac{3}{7}+\frac{5}{28}=\frac{17}{28}$

134

확률의 덧셈정리

전략 양쪽 끝에 모두 남학생이 서는 사건을 A, 양쪽 끝에 모두 2학년 학생이 서는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$임을 이용한다.

풀이 양쪽 끝에 모두 남학생이 서는 사건을 A, 양쪽 끝에 모두 2학년 학생이 서는 사건을 B라 하자.

8명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 $8!$

(ⅰ) 양쪽 끝에 모두 남학생이 서는 경우

남학생 5명 중에서 2명을 뽑아 양쪽 끝에 세우는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2$이고, 남은 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!$이므로 이 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2\times6!$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{P}_2\times6!}{8!}=\frac{5}{14}$$

(ⅱ) 양쪽 끝에 모두 2학년 학생이 서는 경우

2학년 학생 4명 중에서 2명을 뽑아 양쪽 끝에 세우는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2$이고, 남은 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!$이므로 이 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2\times6!$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{P}_2\times6!}{8!}=\frac{3}{14}$$

(ⅲ) 양쪽 끝에 모두 2학년 남학생이 서는 경우

2학년 남학생 3명 중에서 2명을 뽑아 양쪽 끝에 세우는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2$이고, 남은 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!$이므로 이 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2\times6!$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_3\mathrm{P}_2\times6!}{8!}=\frac{3}{28}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\frac{5}{14}+\frac{3}{14}-\frac{3}{28}=\frac{13}{28}$$

135

여사건의 확률

전략 $f(a)f(b)=0$을 만족시키는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 $f(a)\ne0$이고 $f(b)\ne0$을 만족시키는 경우의 수를 빼서 구한다.

풀이 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$f(a)f(b)=0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 A^C는

$f(a)f(b)\neq0$, 즉 $f(a)\neq0$이고 $f(b)\neq0$을 만족시키는 사건이다.

$f(a)=a^2-7a+6=(a-1)(a-6)\neq0$,

$f(b)=b^2-7b+6=(b-1)(b-6)\neq0$

이려면 a, b의 값은 각각 2, 3, 4, 5 중 하나이어야 한다.

따라서 $f(a)\neq0$이고 $f(b)\neq0$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $4\times4=16$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

136

확률의 덧셈정리 + 여사건의 확률

전략 6과 서로소이려면 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니어야 함을 이용한다.

풀이 꺼낸 공에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$,

$\mathrm{P}(B)=\frac{33}{100}$,

$\mathrm{P}(\underbrace{A\cap B}_{6의\ 배수인\ 사건})=\frac{16}{100}=\frac{4}{25}$

이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{33}{100}-\frac{4}{25}=\frac{67}{100}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{67}{100}=\frac{33}{100}$

137

여사건의 확률

전략 꺼낸 4장의 손수건 중에서 흰색 손수건이 2장 이상인 사건은 꺼낸 4장의 손수건 중에서 흰색 손수건이 없거나 흰색 손수건이 1장인 사건의 여사건임을 이용한다.

풀이 흰색 손수건 4장, 검은색 손수건 5장이 들어 있는 상자에서 4장의 손수건을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_4=126$

꺼낸 4장의 손수건 중에서 흰색 손수건이 2장 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 꺼낸 4장의 손수건이 모두 검은색 손수건이거나 흰색 손수건이 1장, 검은색 손수건이 3장인 사건이다.

(i) 꺼낸 4장의 손수건이 모두 검은색 손수건인 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

(ii) 꺼낸 4장의 손수건 중 흰색 손수건이 1장, 검은색 손수건이 3장인 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2=40$

(i), (ii)에서 꺼낸 4장의 손수건이 모두 검은색 손수건이거나 흰색 손수건이 1장, 검은색 손수건이 3장인 경우의 수는

$5+40=45$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{45}{126}=\frac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$

도전 1등급 최고난도

41쪽

138 ③ **139** $\frac{5}{7}$ **140** $\frac{2}{9}$

138

순열과 조합을 이용하는 확률

1단계 전체 경우의 수를 구한다.

1부터 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 선택하는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=120$

2단계 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수인 경우의 수를 구한다.

이때 세 개의 수의 곱이 5의 배수이려면 세 수에 5 또는 10이 반드시 포함되어야 한다.

또, 세 개의 수의 합이 3의 배수이려면 세 수를 3으로 나누었을 때의 나머지가 모두 다르거나 모두 같아야 한다.

즉, 1부터 10까지의 자연수를 3으로 나누었을 때의 나머지가 각각 0, 1, 2인 수의 집합을 차례대로 S_0, S_1, S_2라 하면

$S_0=\{3, 6, 9\}$, $S_1=\{1, 4, 7, 10\}$, $S_2=\{2, 5, 8\}$

이므로 세 집합 S_0, S_1, S_2에서 각각 1개씩 원소를 선택하거나 한 집합에서 3개의 원소를 선택해야 한다.

(i) 세 수에 5가 포함되는 경우

집합 S_2에서 1개의 원소를 선택한 것이므로

㉠ 두 집합 S_0, S_1에서 각각 1개씩 원소를 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=12$

ⓛ 집합 S_2에서 5를 제외한 원소 중에서 2개의 원소를 선택하는 경우의 수는

${}_2C_2=1$

㉠, ⓛ에서 세 수에 5가 포함되는 경우의 수는

$12+1=13$

(ii) 세 수에 10이 포함되는 경우

집합 S_1에서 1개의 원소를 선택한 것이므로

ⓒ 두 집합 S_0, S_2에서 각각 1개씩 원소를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_1=9$

ⓡ 집합 S_1에서 10을 제외한 원소 중에서 2개의 원소를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

ⓒ, ⓡ에서 세 수에 10이 포함되는 경우의 수는

$9+3=12$

(iii) 세 수에 5와 10이 모두 포함되는 경우

두 집합 S_1, S_2에서 각각 1개씩 원소를 선택한 것이므로 집합 S_0에서 1개의 원소를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

즉, 세 수에 5와 10이 모두 포함되는 경우의 수는 3이다.

이상에서 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수인 경우의 수는

$13+12-3=22$

(3단계) 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수일 확률을 구한다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{22}{120}=\frac{11}{60}$

139

순열과 조합을 이용하는 확률

(1단계) 전체 경우의 수를 구한다.

8개의 공 중에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

(2단계) a의 값에 따라 $\frac{bc}{a}$가 자연수가 되는 경우의 수를 구한다.

(i) $a=1$일 때

7개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

${}_7C_2=21$

(ii) $a=2$일 때

3, 4, 5, 6, 7, 8이 적힌 6개의 공 중에서 적어도 1개의 짝수가 적힌 공을 꺼내야 하고, 이때 그 경우의 수는 전체 경우의 수에서 홀수가 적힌 공만 2개 꺼내는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

${}_6C_2-{}_3C_2=15-3=12$

(iii) $a=3$일 때

4, 5, 6, 7, 8이 적힌 5개의 공 중에서 6이 적힌 공과 나머지 한 개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$1\times{}_4C_1=4$

(iv) $a=4$일 때

5, 6, 7, 8이 적힌 4개의 공 중에서 8이 적힌 공과 나머지 한 개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$1\times{}_3C_1=3$

(v) $a=5, 6, 7, 8$일 때

조건을 만족시키는 경우는 없다.

이상에서 $\frac{bc}{a}$가 자연수가 되는 경우의 수는

$21+12+4+3=40$

(3단계) $\frac{bc}{a}$가 자연수일 확률을 구한다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{40}{56}=\frac{5}{7}$

140

확률의 덧셈정리 ⊕ 여사건의 확률

(1단계) 집합 S의 원소의 개수를 구한다.

집합 S의 원소의 개수는 6개의 수 중에서 중복을 허용하여 5개의 수를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6H_5={}_{6+5-1}C_5={}_{10}C_5=252$

(2단계) $a_1\le a_2=a_3\le a_4\le a_5$인 사건을 A, $a_1\le a_2\le a_3=a_4\le a_5$인 사건을 B라 하고, 확률의 덧셈정리를 이용하여 $P(A\cup B)$를 구한다.

$a_1\le a_2=a_3\le a_4\le a_5$인 사건을 A, $a_1\le a_2\le a_3=a_4\le a_5$인 사건을 B라 하면

$a_1\le a_2<a_3<a_4\le a_5$

인 사건은 $A^C\cap B^C$이다.

이때 $n(A)$와 $n(B)$는 6개의 수 중에서 중복을 허용하여 4개의 수를 택하는 경우의 수와 같으므로

$n(A)=n(B)={}_6H_4={}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=126$

또, $a_1\le a_2=a_3=a_4\le a_5$인 사건은 $A\cap B$이고, $n(A\cap B)$는 6개의 수 중에서 중복을 허용하여 3개의 수를 택하는 경우의 수와 같으므로

$n(A\cap B)={}_6H_3={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3=56$

즉,

$P(A)=P(B)=\frac{126}{252}=\frac{1}{2}$,

$P(A\cap B)=\frac{56}{252}=\frac{2}{9}$

이므로

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

(3단계) 여사건의 확률을 이용하여 $P(A^C\cap B^C)$를 구한다.

따라서 구하는 확률은

$$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=1-\frac{7}{9}=\frac{2}{9}$$

04 조건부확률

유형 분석 기출

● 43쪽 ~ 50쪽

141	①	**142**	$\frac{3}{10}$	**143**	①	**144**	③	**145**	③
146	②	**147**	$\frac{3}{5}$	**148**	②	**149**	$\frac{2}{5}$	**150**	$\frac{25}{36}$
151	②	**152**	$\frac{6}{7}$	**153**	$\frac{4}{5}$	**154**	②	**155**	12
156	③	**157**	⑤	**158**	$\frac{2}{5}$	**159**	③	**160**	$\frac{3}{4}$
161	$\frac{9}{13}$	**162**	③	**163**	②	**164**	④	**165**	①
166	$\frac{7}{10}$	**167**	④	**168**	$\frac{1}{3}$	**169**	②	**170**	36
171	③	**172**	260	**173**	$\frac{80}{243}$	**174**	⑤	**175**	③
176	3	**177**	280	**178**	$\frac{3}{32}$	**179**	③	**180**	137

141

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$$
$$=\frac{9}{16}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{16}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{9}{16}}=\frac{1}{9}$$

142

$$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$

따라서 $A\cap B^C=A-B=A$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$$

143

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(B)=3\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{1}{5}$에서

$\mathrm{P}(A)=5\mathrm{P}(A\cap B)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\frac{4}{7}=5\mathrm{P}(A\cap B)+3\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$\frac{4}{7}=7\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{49}$$

144

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$에서

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$1=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A)-\frac{1}{4}$$

$$2\mathrm{P}(A)=\frac{5}{4}\qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}$$

145

주사위를 던져서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $A\cap B=\{2\}$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

다른 풀이 구하는 확률은 짝수의 눈 중에서 소수의 눈을 택할 확률과 같으므로

$\frac{1}{3}$

146

여학생을 택하는 사건을 A, 버스로 등교하는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{7},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{7}}=\frac{7}{18}$$

147

상자에서 빨간색 카드를 꺼내는 사건을 A, 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{9},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}$$

다른 풀이 구하는 확률은 빨간색 카드 중에서 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률과 같으므로 $\frac{3}{5}$

148

갑과 을이 이웃하여 서는 사건을 A, 을과 병이 이웃하여 서는 사건을 B라 하자.

갑, 을 두 명을 하나로 묶어서 생각하여 9명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $9!$이고, 갑과 을이 자리를 바꾸는 경우는 2가지이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{9!\times2}{10!}=\dfrac{1}{5}$

갑, 을, 병 세 명을 하나로 묶어서 생각하여 8명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $8!$이고, 갑과 을이 이웃하면서 을과 병이 이웃하여 서는 경우는 오른쪽과 같이 2가지이므로

(i) 갑 을 병

(ii) 병 을 갑

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{8!\times2}{10!}=\dfrac{1}{45}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{45}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{9}$

149

윤서와 소미가 같은 점수를 얻는 사건을 A, 두 사람이 모두 2점을 얻는 사건을 B라 하자.

주사위의 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 두 사람이 같은 눈의 수가 나오는 경우는

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$

의 6가지이고, 두 사람이 1, 5 또는 2, 6이 나오는 경우는

$(1, 5), (5, 1), (2, 6), (6, 2)$

의 4가지이므로 같은 점수를 얻는 경우의 수는

$6+4=10$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$

또, 두 사람이 모두 2점을 얻는 경우는

$(2, 2), (2, 6), (6, 2), (6, 6)$

의 4가지이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{18}}=\dfrac{2}{5}$

150

승무원을 체험한 학생을 택하는 사건을 A, 여학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{36}{60}=\dfrac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{25}{60}=\dfrac{5}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{25}{36}$

다른 풀이 구하는 확률은 승무원을 체험한 전체 학생 중에서 여학생을 택할 확률과 같으므로 $\dfrac{25}{36}$

151

$a\times b$가 4의 배수인 사건을 A, $a+b\leq7$인 사건을 B라 하자.

주사위의 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) $a\times b$가 4인 경우

$(1, 4), (2, 2), (4, 1)$의 3가지

(ii) $a\times b$가 8인 경우

$(2, 4), (4, 2)$의 2가지

(iii) $a\times b$가 12인 경우

$(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$의 4가지

(iv) $a\times b$가 16인 경우

$(4, 4)$의 1가지

(v) $a\times b$가 20인 경우

$(4, 5), (5, 4)$의 2가지

(vi) $a\times b$가 24인 경우

$(4, 6), (6, 4)$의 2가지

(vii) $a\times b$가 36인 경우

$(6, 6)$의 1가지

이상에서 $a\times b$가 4의 배수인 경우의 수는

$3+2+4+1+2+2+1=15$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

$a\times b$가 4의 배수이고, $a+b\leq7$인 경우는

$(1, 4), (2, 2), (4, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3)$

의 7가지이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{7}{36}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{7}{36}}{\frac{5}{12}}=\dfrac{7}{15}$

152

뽑은 제비 중에서 당첨 제비가 있는 사건을 A, 2등 당첨 제비가 포함되어 있는 사건을 B라 하자.

이때 당첨 제비가 있는 사건은 뽑은 제비 2개가 모두 당첨 제비가 아닌 사건의 여사건이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9}$

또, 2등 당첨 제비가 포함되어 있는 사건은 뽑은 제비 2개가 모두 2등 당첨 제비가 아닌 사건의 여사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=1-\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{9}}=\dfrac{6}{7}$

다른 풀이 10개의 제비 중에서 임의로 2개의 제비를 뽑을 때,

(i) 1등 당첨 제비 1개, 2등 당첨 제비 0개가 나오는 경우의 수는

${}_1\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1=5$

(ii) 1등 당첨 제비 0개, 2등 당첨 제비 1개가 나오는 경우의 수는

$_4C_1 \times {_5C_1} = 20$

(iii) 1등 당첨 제비 1개, 2등 당첨 제비 1개가 나오는 경우의 수는

$_1C_1 \times {_4C_1} = 4$

(iv) 1등 당첨 제비 0개, 2등 당첨 제비 2개가 나오는 경우의 수는

$_4C_2 = 6$

이상에서 당첨 제비가 나오는 경우의 수는

$5+20+4+6=35$

이고, 그중 2등 당첨 제비가 포함되는 경우의 수는

$20+4+6=30$

따라서 구하는 확률은

$\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$

153

1회 시행 후 주머니 A에 검은 공 1개, 흰 공 3개가 들어 있는 사건을 A, 주머니 B에서 검은 공을 꺼낸 사건을 B라 하자.

2개의 공을 동시에 꺼내어 서로 상대 주머니에 넣은 후 주머니 A에 검은 공 1개, 흰 공 3개가 들어 있는 각 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) 주머니 A에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼내고, 주머니 B에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼내는 경우

$\frac{_1C_1 \times {_3C_1}}{_4C_2} \times \frac{_2C_1 \times {_2C_1}}{_4C_2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

(ii) 주머니 A에서 흰 공 2개를 꺼내고, 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼내는 경우

$\frac{_3C_2}{_4C_2} \times \frac{_2C_2}{_4C_2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A \cap B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}}=\frac{4}{5}$$

154

첫 번째에 딸기 맛 사탕을 먹는 사건을 A, 두 번째에 포도 맛 사탕을 먹는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{7}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{7} \times \frac{2}{3}=\frac{2}{7}$

155

갑이 당첨 복권이 아닌 것을 뽑는 사건을 A, 을이 당첨 복권을 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{12-n}{12}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{11}$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{12-n}{12} \times \frac{n}{11}\\&=\frac{n(12-n)}{132}\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}(A \cap B)=\frac{9}{44}$이므로

$\frac{n(12-n)}{132}=\frac{9}{44}$

$n^2-12n+27=0$, $(n-3)(n-9)=0$

$\therefore n=3$ 또는 $n=9$

따라서 모든 n의 값의 합은

$3+9=12$

156

첫 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 빨간 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{n}{n+4}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{n+3}$

이므로 첫 번째에는 흰 공을, 두 번째에는 빨간 공을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{n}{n+4} \times \frac{4}{n+3}\\&=\frac{4n}{(n+4)(n+3)}\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}(A \cap B)=\frac{1}{5}$이므로

$\frac{4n}{(n+4)(n+3)}=\frac{1}{5}$

$n^2-13n+12=0$, $(n-1)(n-12)=0$

$\therefore n=12$ ($\because n \ge 2$)

157

코로나에 걸린 사람을 택하는 사건을 A, 코로나에 걸렸다고 진단하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(A^C)=0.6$

$\mathrm{P}(E|A)=0.8$, $\mathrm{P}(E|A^C)=0.1$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A \cap E)+\mathrm{P}(A^C \cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=0.4 \times 0.8+0.6 \times 0.1\\&=0.38\end{aligned}$$

158

A가 소수가 적힌 구슬을 꺼내는 사건을 A, B가 소수가 적힌 구슬을 꺼내는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{5}$

159

내일 비가 내리는 사건을 A, 축구팀이 내일 경기에서 이기는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(A^C)=1-0.4=0.6$

$\mathrm{P}(E|A)=0.3$, $\mathrm{P}(E|A^C)=0.5$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)$

$=0.4\times0.3+0.6\times0.5=0.42$

160

기계 A에서 생산된 제품을 택하는 사건을 A, 불량품을 택하는 사건을 E라 하면 기계 B에서 생산된 제품을 택하는 사건이 A^C이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=0.4\times0.01=0.004$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=0.6\times0.02=0.012$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=0.004+0.012=0.016$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C|E)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.012}{0.016}=\frac{3}{4}$

161

흰색 모자를 꺼내는 사건을 A, 노란색 모자라고 대답하는 사건을 E라 하면 노란색 모자를 꺼내는 사건이 A^C이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{2}{5}\times\frac{40}{100}=\frac{4}{25}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{3}{5}\times\frac{60}{100}=\frac{9}{25}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\frac{4}{25}+\frac{9}{25}=\frac{13}{25}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C|E)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{9}{25}}{\frac{13}{25}}=\frac{9}{13}$

162

첫 번째 시행에서 빨간색인 카드를 뒤집는 사건을 A, 이 시행을 2번 반복한 후 빨간색인 카드가 한 개인 사건을 E라 하면 첫 번째 시행에서 파란색인 카드를 뒤집는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{6}\times1=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{5}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{18}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)$

$=\frac{1}{6}+\frac{5}{18}=\frac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{9}}=\frac{3}{8}$

163

성재가 가위를 내는 사건을 A, 바위를 내는 사건을 B, 보를 내는 사건을 C, 성재가 이기는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=0.3\times0.4=0.12$

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=0.4\times0.2=0.08$

$\mathrm{P}(C\cap E)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)=0.3\times0.4=0.12$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$

$=0.12+0.08+0.12=0.32$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.12}{0.32}=\frac{3}{8}$

164

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $C=\{3, 4\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(C\cap A)=\frac{1}{6}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$ 이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$

즉, 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{6}$ 이므로

$\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(B\cap C)$

즉, 두 사건 B, C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$ 이므로

$\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(C\cap A)$

즉, 두 사건 C, A는 서로 독립이다.

이상에서 서로 독립인 사건은 ㄴ, ㄷ이다.

165

① 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$A\cap B=\varnothing$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)$이므로

$\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=1$

② 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq0$, $\mathrm{P}(B)\neq0$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉, 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다.

③ 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A-B)$

$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

즉, 두 사건 A, B^C는 서로 독립이다.

④ 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A|B)$와 $\mathrm{P}(B|A)$가 항상 같은 것은 아니다.

⑤ 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C와 B, A^C와 B^C는 모두 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\mathrm{P}(A^C)$

$1-\mathrm{P}(A^C|B)=1-\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(A)$

이때 $\mathrm{P}(A^C|B^C)$와 $1-\mathrm{P}(A^C|B)$가 항상 같은 것은 아니다.

따라서 옳은 것은 ①이다.

개념 보충

사건의 독립(1)

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립임을 확인해 보자.

두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B-A)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$

$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

즉, 두 사건 A^C, B는 서로 독립이다.

166

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

또, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{4}{5}$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{4}{5}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{7}{15}\qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$

다른 풀이 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=\frac{2}{3}\{1-\mathrm{P}(B)\}=\frac{1}{5}$

$1-\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}\qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$

개념 보충

사건의 독립(2)

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립임을 확인해 보자.

두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}$

$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

즉, 두 사건 A^C, B^C는 서로 독립이다.

167

$\mathrm{P}(A^C)=3\mathrm{P}(A)$이므로 $1-\mathrm{P}(A)=3\mathrm{P}(A)$에서

$4\mathrm{P}(A)=1\qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{1}{6}=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)\qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

168

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{2}{3}\qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{12}$

$\therefore \alpha=\frac{1}{12}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)$

$\frac{1}{3}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{12}\qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

$\therefore \beta=\frac{1}{4}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$

169

두 선수 A, B가 페널티 킥을 성공시키는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}p$

또, 두 선수 A, B 중 적어도 한 명이 페널티 킥을 성공시킬 확률이 $\frac{13}{25}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{13}{25}$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{13}{25}=\frac{2}{5}+p-\frac{2}{5}p$, $\frac{3}{5}p=\frac{3}{25}$

$\therefore p=\frac{1}{5}$

다른 풀이 두 선수 A, B가 페널티 킥을 성공시키는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 두 선수 A, B가 모두 페널티 킥을 성공시키지 못할 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\\&=\left(1-\frac{2}{5}\right)(1-p)\\&=\frac{3}{5}(1-p)\end{aligned}\quad\cdots\cdots ㉠$$

A, B가 서로 독립이므로 A^C, B^C도 서로 독립이다.

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{13}{25}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\frac{13}{25}=\frac{12}{25}\end{aligned}\quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$\frac{3}{5}(1-p)=\frac{12}{25}$, $1-p=\frac{4}{5}$

$\therefore p=\frac{1}{5}$

170

희진이와 윤호가 흰 공을 뽑는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$

두 사람 중에서 한 명만 흰 공을 뽑는 사건은

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로 두 사건 A, B^C도 서로 독립이고, 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다.

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{25}$

그런데 $A\cap B^C$, $A^C\cap B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}((A\cap B^C)\cup(A^C\cap B))&=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\frac{8}{25}+\frac{3}{25}=\frac{11}{25}\end{aligned}$$

따라서 $p=25$, $q=11$이므로

$p+q=25+11=36$

171

재현이가 받은 점수의 합이 80점이 되는 각 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) 창의성에서 50점, 심미성에서 30점을 받는 경우

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

(ii) 창의성, 심미성에서 모두 40점을 받는 경우

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(iii) 창의성에서 30점, 심미성에서 50점을 받는 경우

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

이상에서 구하는 확률은

$\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}$

172

전체 학생 480명 중에서 1학년 학생을 택하는 사건을 A, 체험 학습 실시에 찬성하는 학생을 택하는 사건을 B라 하자. 1학년 학생 중에서 체험 학습 실시에 찬성하는 학생을 x명이라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{120}{480}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{280}{480}=\frac{7}{12}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{480}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{x}{480}=\frac{1}{4}\times\frac{7}{12}\qquad\therefore x=70$

1학년 학생이 120명이므로

$70+a=120$에서 $a=50$

체험 학습 실시에 찬성하는 학생이 280명이므로

$70+b=280$에서 $b=210$

$\therefore a+b=50+210=260$

173

자유투를 한 번 던져 성공할 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 실패할 확률은

$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

따라서 5번의 자유투를 던져 3번 성공할 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$

174

한 개의 동전을 4번 던질 때 앞면이 적어도 한 번 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 뒷면이 4번 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

175

가영이가 문제를 맞힐 확률은 $\frac{4}{5}$

(i) 가영이가 2문제를 맞힐 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{48}{125}$

(ii) 가영이가 3문제를 맞힐 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^0=\frac{64}{125}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{48}{125}+\frac{64}{125}=\frac{112}{125}$

176

주머니에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼냈을 때, 이 구슬이 흰 구슬인 사건을 A라 하자.

$P(A)=\frac{3}{5}$, $P(A^C)=\frac{2}{5}$이므로 10회의 독립시행에서 사건 A가 n번 일어날 확률은

$P(n)={}_{10}C_n\left(\frac{3}{5}\right)^n\left(\frac{2}{5}\right)^{10-n}$

이고, 사건 A가 $(10-n)$번 일어날 확률은

$P(10-n)={}_{10}C_{10-n}\left(\frac{3}{5}\right)^{10-n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

$$\therefore \frac{P(10-n)}{P(n)}=\frac{{}_{10}C_{10-n}\left(\frac{3}{5}\right)^{10-n}\left(\frac{2}{5}\right)^n}{{}_{10}C_n\left(\frac{3}{5}\right)^n\left(\frac{2}{5}\right)^{10-n}}$$

$$=\frac{{}_{10}C_{10-n}}{{}_{10}C_n}\times 3^{10-2n}\times 2^{2n-10}$$

$$=\frac{3^{10-2n}}{2^{10-2n}}\ (\because {}_{10}C_{10-n}={}_{10}C_n)$$

즉, $\frac{3^{10-2n}}{2^{10-2n}}=\frac{81}{16}=\frac{3^4}{2^4}$이므로

$10-2n=4 \qquad \therefore n=3$

177

한 번의 가위바위보에서 성희가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$

성희가 이긴 횟수를 $x\ (0\le x\le 7)$라 하면 비기거나 진 횟수는 $(7-x)$이다.

성희가 5계단을 올라가려면

$2x-(7-x)=5,\ 3x=12 \qquad \therefore x=4$

따라서 구하는 확률은

${}_7C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{280}{3^7}$

이므로 $n=280$

178

(i) 주머니에서 흰 구슬을 꺼내고 화살을 2번 쏘아 2번 모두 명중시킬 확률은

$\frac{3}{5}\times{}_2C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{3}{80}$

(ii) 주머니에서 검은 구슬을 꺼내고 화살을 3번 쏘아 2번 명중시킬 확률은

$\frac{2}{5}\times{}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{160}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{80}+\frac{9}{160}=\frac{3}{32}$

179

A선수가 이길 확률이 $\frac{3}{5}$이므로 B선수가 이길 확률은

$1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

다섯 번째 경기에서 승부가 결정되려면 우승하는 선수는 네 번째 경기까지 3번 이기고 1번 진 후, 다섯 번째 경기에서 이겨야 한다.

(i) A선수가 우승할 확률은

${}_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1\times\frac{3}{5}=\frac{648}{5^5}$

(ii) B선수가 우승할 확률은

${}_4C_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\frac{2}{5}=\frac{192}{5^5}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{648}{5^5}+\frac{192}{5^5}=\frac{168}{625}$

180

한 개의 주사위를 5번 던지고, 한 개의 동전을 4번 던지므로

$0\le a\le 5,\ 0\le b\le 4$

이때 $a-b=3$이 되는 경우는

$a=5,\ b=2$ 또는 $a=4,\ b=1$ 또는 $a=3,\ b=0$

(i) $a=5,\ b=2$일 확률은

${}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0\times{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=6\times\left(\frac{1}{2}\right)^9$

(ii) $a=4,\ b=1$일 확률은

${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=20\times\left(\frac{1}{2}\right)^9$

(iii) $a=3,\ b=0$일 확률은

${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^9$

이상에서 구하는 확률은

$6\times\left(\frac{1}{2}\right)^9+20\times\left(\frac{1}{2}\right)^9+10\times\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{36}{2^9}=\frac{9}{128}$

따라서 $p=128,\ q=9$이므로 $p+q=128+9=137$

내신 적중 서술형

● 51쪽

181 $\frac{1}{2}$ **182** $\frac{69}{98}$ **183** $\frac{4}{5}$ **184** (1) 0, 1 (2) $\frac{16}{27}$

181

주사위를 한 번 던져서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 이차방정식 $x^2-ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ······ ㉮

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 판별식을 D라 할 때, 서로 다른 두 실근을 가지려면

$D=a^2-4b>0 \qquad \therefore a^2>4b$

즉, a가 짝수이고, 이차방정식 $x^2-ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우를 순서쌍 (a, b)로 나타내면
$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$의 9가지이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ㉯$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉰$$

채점 기준	배점 비율
㉮ 주사위를 한 번 던져서 짝수의 눈이 나올 확률 구하기	30 %
㉯ a가 짝수이고, 이차방정식 $x^2-ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 확률 구하기	50 %
㉰ a가 짝수일 때, 이차방정식 $x^2-ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 확률 구하기	20 %

182

처음에 검은 공을 꺼내는 사건을 A, 2개의 공을 꺼낼 때 적어도 한 개의 흰 공을 꺼내는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{7},\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{7}$$

처음에 검은 공을 꺼낸 경우, 상자 안에 검은 공 5개, 흰 공 3개가 들어 있게 되므로

$$\mathrm{P}(E|A)=1-\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14} \quad \cdots\cdots ㉮$$

처음에 흰 공을 꺼낸 경우, 상자 안에 검은 공 4개, 흰 공 4개가 들어 있게 되므로

$$\mathrm{P}(E|A^C)=1-\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=1-\frac{3}{14}=\frac{11}{14} \quad \cdots\cdots ㉯$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=\frac{4}{7}\times\frac{9}{14}+\frac{3}{7}\times\frac{11}{14}=\frac{69}{98}\end{aligned} \quad \cdots\cdots ㉰$$

채점 기준	배점 비율
㉮ 처음에 검은 공을 꺼낸 경우, 다시 2개의 공을 꺼낼 때 적어도 한 개의 흰 공을 꺼낼 확률 구하기	40 %
㉯ 처음에 흰 공을 꺼낸 경우, 다시 2개의 공을 꺼낼 때 적어도 한 개의 흰 공을 꺼낼 확률 구하기	40 %
㉰ 2개의 공을 꺼낼 때, 적어도 한 개의 흰 공을 꺼낼 확률 구하기	20 %

183

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A와 B^C, 두 사건 A^C와 B도 모두 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$$
$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B) \quad \cdots\cdots ㉮$$

또, 두 사건 $A-B$와 $B-A$는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}((A-B)\cup(B-A))=\mathrm{P}(A-B)+\mathrm{P}(B-A)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A-B)&=\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\\&=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\frac{1}{3}\{1-\mathrm{P}(B)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B-A)&=\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

이므로 $\frac{1}{3}\{1-\mathrm{P}(B)\}+\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$ ...... ㉯

$\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{4}{15}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}$ ...... ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ A와 B^C, A^C와 B가 서로 독립임을 알기	30 %
㉯ $\mathrm{P}((A-B)\cup(B-A))=\frac{3}{5}$을 $\mathrm{P}(B)$에 대한 식으로 나타내기	50 %
㉰ $\mathrm{P}(B)$ 구하기	20 %

184

(1) 4번의 시행 중에서 검은 공이 나온 횟수를 x $(0\le x\le 4)$라 하면 흰 공이 나온 횟수는 $(4-x)$이므로

$1\times x+2\times(4-x)\ge 7$ ...... ㉮

$-x\ge -1$ $\quad\therefore x\le 1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

따라서 검은 공이 나올 수 있는 횟수는 0, 1이다. ...... ㉯

(2) 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{81}+\frac{32}{81}=\frac{16}{27} \quad \cdots\cdots ㉰$$

채점 기준		배점 비율
(1)	㉮ 검은 공이 나온 횟수에 대한 부등식 세우기	30 %
	㉯ 검은 공이 나올 수 있는 횟수 구하기	20 %
(2)	㉰ 기록한 점수의 합이 7점 이상일 확률 구하기	50 %

1등급 실력 완성

52쪽 ~ 53쪽

185 ③ **186** ④ **187** $\frac{17}{212}$ **188** ② **189** ④
190 ④ **191** $\frac{11}{27}$ **192** $\frac{8}{9}$

185

조건부확률의 계산

전략 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$를 간단히 정리한 후, 이 식의 값이 최대일 때와 최소일 때를 파악한다.

풀이 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$=\frac{P(A\cap B)}{0.7}$

$=\frac{10}{7}P(A\cap B)$

이므로 $P(A\cap B)$가 최대일 때 $P(B|A)$도 최대이고, $P(A\cap B)$가 최소일 때 $P(B|A)$도 최소이다.

(i) $B\subset A$일 때 $P(A\cap B)$는 최대이고, 최댓값은

$P(A\cap B)=P(B)=0.5$

$\therefore M=\frac{10}{7}\times 0.5=\frac{5}{7}$

(ii) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1$일 때 $P(A\cap B)$는 최소이고, 최솟값은

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-1$

$=0.7+0.5-1=0.2$

$\therefore m=\frac{10}{7}\times 0.2=\frac{2}{7}$

(i), (ii)에서 $M+m=\frac{5}{7}+\frac{2}{7}=1$

186

조건부확률

전략 스포츠 센터를 주 2회 이하 이용하는 회원인 사건을 A, 남성 회원인 사건을 B라 하고 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$임을 이용한다.

풀이 전체 회원 160명 중에서 스포츠 센터를 주 3회 이상 이용하는 회원 수는 $160\times\frac{60}{100}=96$이고, 스포츠 센터를 주 2회 이하 이용하는 회원 수는 $160\times\frac{40}{100}=64$이다.

스포츠 센터를 주 3회 이상 이용하는 여성 회원의 수를 a라 하면 이 스포츠 센터의 회원 중에서 임의로 택한 회원이 여성일 때, 이 회원이 주 3회 이상 이용할 확률이 $\frac{2}{5}$이므로

$\frac{a}{60}=\frac{2}{5}$ $\quad\therefore a=24$

즉, 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	주 3회 이상	주 2회 이하	합계
남성	72	28	100
여성	24	36	60
합계	96	64	160

이 스포츠 센터의 회원 중에서 임의로 한 명을 택했을 때 스포츠 센터를 주 2회 이하 이용하는 회원인 사건을 A, 남성 회원인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{64}{160}=\frac{2}{5}$, $P(A\cap B)=\frac{28}{160}=\frac{7}{40}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{7}{40}}{\frac{2}{5}}=\frac{7}{16}$

187

조건부확률

전략 여사건의 확률을 이용하여 $P(A)$를 구하고, 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한 후 조건부확률을 이용한다.

풀이 주사위의 눈의 수 a, b, c가 $a+b+c>16$을 만족시키는 경우를 순서쌍 (a, b, c)로 나타내면

$(5, 6, 6)$, $(6, 5, 6)$, $(6, 6, 5)$, $(6, 6, 6)$

의 4가지이므로

$P(A^C)=\frac{4}{216}=\frac{1}{54}$

$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{54}=\frac{53}{54}$

$a+b=2c$에서

(i) $c=1$일 때, $a+b=2$이므로

$(1, 1, 1)$의 1가지

(ii) $c=2$일 때, $a+b=4$이므로

$(1, 3, 2)$, $(2, 2, 2)$, $(3, 1, 2)$

의 3가지

(iii) $c=3$일 때, $a+b=6$이므로

$(1, 5, 3)$, $(2, 4, 3)$, $(3, 3, 3)$, $(4, 2, 3)$, $(5, 1, 3)$

의 5가지

(iv) $c=4$일 때, $a+b=8$이므로

$(2, 6, 4)$, $(3, 5, 4)$, $(4, 4, 4)$, $(5, 3, 4)$, $(6, 2, 4)$

의 5가지

(v) $c=5$일 때, $a+b=10$이므로

$(4, 6, 5)$, $(5, 5, 5)$, $(6, 4, 5)$

의 3가지

(vi) $c=6$일 때, $a+b=12$이므로

$(6, 6, 6)$의 1가지

그런데 $(6, 6, 6)$은 $a+b+c\le 16$을 만족시키지 않는다.

이상에서 $P(A\cap B)=\frac{1+3+5+5+3}{216}=\frac{17}{216}$

$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{17}{216}}{\frac{53}{54}}=\frac{17}{212}$

188

조건부확률과 확률의 곱셈정리

전략 세 주사위 A, B, C에서 두 번 모두 같은 수가 나오는 사건의 확률을 각각 구한다.

풀이 세 주사위 A, B, C를 택하는 사건을 각각 A, B, C라 하고 주사위를 두 번 던졌을 때 두 번 모두 같은 수가 나오는 사건을 E라 하면

$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{27}$

$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{27}$

$P(C\cap E)=P(C)P(E|C)$

$$=\frac{1}{3}\times(1\times1)=\frac{1}{3}$$

$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)$

$$=\frac{5}{27}+\frac{5}{27}+\frac{1}{3}=\frac{19}{27}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{5}{27}}{\frac{19}{27}}=\frac{5}{19}$$

189

조건부확률

전략 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8인 사건을 E, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2인 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $P(F|E)$임을 이용한다.

풀이 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8인 사건을 E, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2인 사건을 F라 하자.

한 번의 시행에서 상자 B에 넣는 공의 개수는 1 또는 2 또는 3이므로 주어진 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8인 경우는

1, 1, 3, 3 또는 1, 2, 2, 3 또는 2, 2, 2, 2

를 일렬로 나열하는 경우와 같다.

(i) 상자 B에 넣은 공의 개수가 1, 1, 3, 3인 경우

상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수는 2이다.

주머니에서 숫자 1이 적힌 카드를 2번, 숫자 4가 적힌 카드를 2번 꺼내면 되므로 이 경우의 확률은

$$\frac{4!}{2!\times2!}\times\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}=6\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

(ii) 상자 B에 넣은 공의 개수가 1, 2, 2, 3인 경우

상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수는 3이다.

주머니에서 숫자 1이 적힌 카드를 1번, 숫자 2 또는 3이 적힌 카드를 2번, 숫자 4가 적힌 카드를 1번 꺼내면 되므로 이 경우의 확률은

$$\frac{4!}{2!}\times\left\{\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}\right\}=48\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

(iii) 상자 B에 넣은 공의 개수가 2, 2, 2, 2인 경우

상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수는 4이다.

주머니에서 숫자 2 또는 3이 적힌 카드를 4번 꺼내면 되므로 이 경우의 확률은

$$\left(\frac{2}{4}\right)^4=16\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

이상에서

$$P(E)=6\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+48\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+16\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$=70\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

따라서 구하는 확률은

$$P(F|E)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{6\times\left(\frac{1}{4}\right)^4}{70\times\left(\frac{1}{4}\right)^4}=\frac{3}{35}$$

190

조건부확률 + 사건의 독립과 종속

전략 두 사건 A, B에 대하여 $A\cap B=\varnothing$이면 A, B는 서로 배반사건이고, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이면 A, B는 서로 독립임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $A_2=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, $A_4=\{4, 8, 12\}$,

$A_2\cap A_4=\{4, 8, 12\}$이므로

$P(A_2)=\frac{7}{15}$, $P(A_4)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$,

$P(A_2\cap A_4)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

$$\therefore P(A_4|A_2)=\frac{P(A_2\cap A_4)}{P(A_2)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{15}}=\frac{3}{7}\text{ (거짓)}$$

ㄴ. $A_6=\{6, 12\}$, $A_8=\{8\}$이므로

$A_6\cap A_8=\varnothing$

따라서 두 사건 A_6과 A_8은 서로 배반사건이다. (참)

ㄷ. $A_3=\{3, 6, 9, 12, 15\}$, $A_5=\{5, 10, 15\}$,

$A_3\cap A_5=\{15\}$이므로

$P(A_3)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, $P(A_5)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$,

$P(A_3\cap A_5)=\frac{1}{15}$

따라서 $P(A_3\cap A_5)=P(A_3)P(A_5)$이므로 두 사건 A_3과 A_5는 서로 독립이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

191

독립시행의 확률

전략 네 수의 합이 6 이하가 되는 경우를 구하고 독립시행의 확률을 이용한다.

풀이 정육면체 모양의 상자를 네 번 던졌을 때, 네 수의 합이 6 이하가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 네 수의 합이 4인 경우

1이 네 번 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{81}$$

(ii) 네 수의 합이 5인 경우

1이 세 번 나오고 2가 한 번 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$$

(iii) 네 수의 합이 6인 경우

1이 두 번 나오고 2가 두 번 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{81}+\frac{8}{81}+\frac{8}{27}=\frac{11}{27}$$

192

독립시행의 확률

전략 주사위를 4번 던져서 원점에서 출발한 점 P의 좌표가 2 이상인 경우를 구하고 독립시행의 확률을 이용한다.

풀이 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상인 경우는 다음과 같다.

(i) 점 P의 좌표가 2인 경우

4번의 시행 중에서 6의 약수의 눈이 2번 나오는 경우이므로 이 경우의 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

(ii) 점 P의 좌표가 3인 경우

4번의 시행 중에서 6의 약수의 눈이 3번 나오는 경우이므로 이 경우의 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$$

(iii) 점 P의 좌표가 4인 경우

4번의 시행 중에서 6의 약수의 눈이 4번 나오는 경우이므로 이 경우의 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{16}{81}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{8}{27}+\frac{32}{81}+\frac{16}{81}=\frac{8}{9}$$

도전 1등급 최고난도

54쪽

193 9 **194** $\frac{5}{36}$

193

조건부확률

1단계) $b-a\geq5$인 사건을 A, $c-a\geq10$인 사건을 B라 하고 $\mathrm{P}(A)$를 구한다.

$b-a\geq5$인 사건을 A, $c-a\geq10$인 사건을 B라 하자.

12개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{12}C_3=220$

$b-a\geq5$에서 $b\geq a+5$

또, c는 b보다 큰 자연수이므로 $c\geq b+1$

$\therefore a+6\leq b+1\leq c$

이때 $1\leq a<b<c\leq12$이므로

$7\leq a+6\leq b+1\leq c\leq12$

$a+6$, $b+1$, c의 값은 7부터 12까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 크기가 작은 것부터 차례대로 $a+6$, $b+1$, c의 값으로 정하면 된다.

즉, $b-a\geq5$를 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 6개의 자연수 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6H_3={}_{6+3-1}C_3={}_8C_3=56$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{56}{220}=\frac{14}{55}$

2단계) a의 값에 따라 $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구한다.

사건 $A\cap B$는 $b-a\geq5$이고 $c-a\geq10$인 사건이므로

(i) $a=1$인 경우

$b-a\geq5$에서 $b-1\geq5$ $\quad\therefore b\geq6$

$c-a\geq10$에서 $c-1\geq10$ $\quad\therefore c\geq11$

$c=11$이면 $6\leq b<11$이므로

$b=6, 7, 8, 9, 10$

$c=12$이면 $6\leq b<12$이므로

$b=6, 7, 8, 9, 10, 11$

즉, a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$5+6=11$

(ii) $a=2$인 경우

$b-a\geq5$에서 $b-2\geq5$ $\quad\therefore b\geq7$

$c-a\geq10$에서 $c-2\geq10$ $\quad\therefore c\geq12$

$c=12$이고, $7\leq b<12$이므로

$b=7, 8, 9, 10, 11$

즉, a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 5이다.

(i), (ii)에서 $b-a\geq5$이고 $c-a\geq10$을 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $11+5=16$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{16}{220}=\frac{4}{55}$

3단계) 조건부확률을 이용하여 $\mathrm{P}(B|A)$를 구한다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{4}{55}}{\frac{14}{55}}=\frac{2}{7}$$

즉, $p=7$, $q=2$이므로 $p+q=7+2=9$

194

독립시행의 확률

1단계) A 지점에서 출발한 바둑돌이 B 지점에 도달하기 위해 어떻게 움직여야 하는지 파악한다.

한 개의 주사위를 5번 던져 A 지점에 있던 바둑돌이 B 지점에 있으려면 오른쪽으로 2칸, 왼쪽으로 1칸, 위쪽으로 2칸 이동해야 한다.

2단계) 각 주사위의 눈이 나올 확률을 구한 후, A 지점에서 출발한 바둑돌이 B 지점에 있을 확률을 구한다.

1 또는 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

3의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$

4 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$$\boxed{\frac{5!}{2!\times2!}}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{36}$$

오른쪽, 왼쪽, 위쪽으로 이동하는 것을 각각 같은 것으로 생각하여 같은 것이 있는 순열을 이용한다.

1등급 비법

1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 a, 사건 B가 일어날 확률을 b, 사건 C가 일어날 확률을 c라 할 때, 이 시행을 독립적으로 n회 반복하는 시행에서 A가 p회, B가 q회, C가 r회 일어날 확률은

$$\frac{n!}{p!\times q!\times r!}a^pb^qc^r \text{ (단, } a+b+c=1,\ p+q+r=n)$$

Ⅲ 통계

05 확률분포

유형 분석 기출

59쪽 ~ 68쪽

195 ③	196 ②	197 $\frac{11}{30}$	198 ①	199 4
200 ④	201 $\frac{1}{3}$	202 $\frac{1}{18}$	203 ⑤	204 2
205 $\frac{59}{36}$	206 ⑤	207 ①	208 -3	209 ②
210 2	211 ⑤	212 $\frac{3}{2}$, $\frac{3\sqrt{5}}{10}$		213 ⑤
214 ④	215 ④	216 ⑤	217 42	218 25
219 ②	220 15	221 210	222 ②	223 ②
224 ②	225 0.8185	226 ③	227 ③	228 ②
229 ②	230 수학	231 ②	232 ①	
233 360점	234 ④	235 ②	236 ⑤	
237 0.9332	238 0.9938	239 ④	240 994	

195

확률의 총합은 1이므로

$\frac{a}{2}+\left(\frac{3}{4}-a\right)+2a^2=1$

$8a^2-2a-1=0$, $(4a+1)(2a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{4}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

이때 $0\le \mathrm{P}(X=x)\le 1$이므로 $a=\frac{1}{2}$

196

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=9)=1$

$\frac{k}{2\times1}+\frac{k}{3\times2}+\frac{k}{4\times3}+\cdots+\frac{k}{9\times8}=1$

$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}=1$

$k\left(1-\frac{1}{9}\right)=1$, $\frac{8}{9}k=1$ $\quad\therefore k=\frac{9}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{9}{8x(x-1)}$ $(x=2, 3, 4, \cdots, 9)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(4\le X\le 6)&=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)\\&=\frac{9}{8}\times\left(\frac{1}{4\times3}+\frac{1}{5\times4}+\frac{1}{6\times5}\right)\\&=\frac{9}{8}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{9}{8}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{16}\end{aligned}$$

1등급 비법

확률변수 X의 확률질량함수

$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$

에 대하여 p_i의 일부를 모르거나 함수식에 미정계수가 있을 때는

$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$

임을 이용한다.

개념 보충

부분분수의 변형

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\ne B$)

197

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$

$\mathrm{P}(X=0)+2\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\}=1$

$\frac{1}{10}+2\left\{\left(k+\frac{1}{10}\right)+\left(2k+\frac{1}{10}\right)\right\}=1$

$6k+\frac{1}{2}=1$, $6k=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore k=\frac{1}{12}$

따라서 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{1}{12}|x|+\frac{1}{10}$ $(-2\le x\le 2$, x는 정수)이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X^2=1)&=\mathrm{P}(X=-1 \text{ 또는 } X=1)\\&=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)\\&=2\mathrm{P}(X=1)\\&=2\times\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{10}\right)\\&=\frac{11}{30}\end{aligned}$$

198

$X^2-6X+8=0$에서

$(X-2)(X-4)=0$ $\quad\therefore X=2$ 또는 $X=4$

뽑은 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하면 두 수의 차가

2인 경우의 (a, b)는 $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$의 3가지,

4인 경우의 (a, b)는 $(0, 4)$의 1가지

이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X^2-6X+8=0)&=\mathrm{P}(X=2 \text{ 또는 } X=4)\\&=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=4)\\&=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\\&=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

199

포도 맛 사탕이 4개뿐이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은

1, 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\dfrac{1}{42}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\dfrac{5}{21}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\dfrac{10}{21}$,

$\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\dfrac{5}{21}$,

$\mathrm{P}(X=5)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_5\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\dfrac{1}{42}$

이때 $\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)=\dfrac{5}{21}+\dfrac{1}{42}=\dfrac{11}{42}$이므로

$\mathrm{P}(X\ge a)=\dfrac{11}{42}$을 만족시키는 자연수 a의 값은 4이다.

200

숫자 1, 2, 3이 적혀 있는 공의 개수를 각각 a, b, c라 하면

$a+b+c=7$ …… ㉠

$\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{{}_b\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{b(b-1)}{42}=\dfrac{1}{21}$에서

$b(b-1)=2=2\times1 \qquad \therefore b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$a+c=5$ …… ㉡

$2\mathrm{P}(X=2)=3\mathrm{P}(X=6)$에서

$2\times\dfrac{{}_a\mathrm{C}_1\times{}_b\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=3\times\dfrac{{}_b\mathrm{C}_1\times{}_c\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}$

$\therefore 2a=3c$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=2$

$\therefore \mathrm{P}(X\le3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}+\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}+\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}$

$=\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{5}{7}$

201

1의 약수의 개수는 1,

2, 3, 5의 약수의 개수는 2,

4의 약수의 개수는 3,

6의 약수의 개수는 4

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

X의 확률분포를 이용하여 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

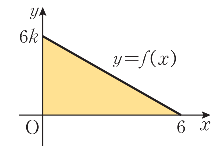
Y	1	2	4	9	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore \mathrm{P}(2Y-2<3Y-5)=\mathrm{P}(Y>3)$

$=\mathrm{P}(Y=4)+\mathrm{P}(Y=9)$

$=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$

202



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\dfrac{1}{2}\times6\times6k=1$

$18k=1 \qquad \therefore k=\dfrac{1}{18}$

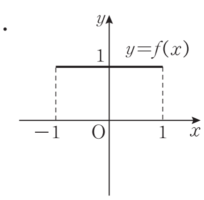
1등급 비법

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$ $(\alpha\le x\le\beta)$에 미정계수가 있는 경우에는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1임을 이용하여 미정계수를 구한다.

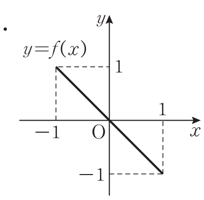
203

보기의 함수 $y=f(x)$ $(-1\le x\le1)$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.

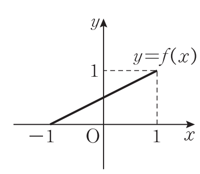
ㄱ.



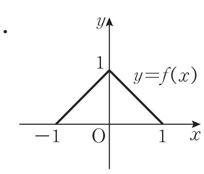
ㄴ.



ㄷ.



ㄹ.

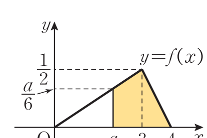


ㄱ. $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

ㄴ. $0<x\le1$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 아니다.

이상에서 확률밀도함수인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

204



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $\mathrm{P}(X\ge a)$는 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(X\ge a)=\dfrac{2}{3}$에서

$1-\mathrm{P}(0\le X\le a)=\dfrac{2}{3}$

$1-\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{a}{6}=\dfrac{2}{3}$

$a^2-4=0$, $(a+2)(a-2)=0$

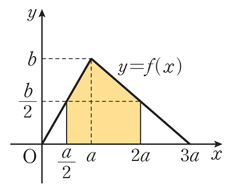
$\therefore a=2$ $(\because 0<a<3)$

205

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\dfrac{1}{2}\times3a\times b=1 \qquad \therefore 3ab=2$ …… ㉠

$\mathrm{P}\left(\frac{a}{2}\le X\le 2a\right)$는 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}\left(\frac{a}{2}\le X\le 2a\right)$

$=1-\left\{\mathrm{P}\left(0\le X\le \frac{a}{2}\right)+\mathrm{P}(2a\le X\le 3a)\right\}$

$=1-\left(\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\times a\times\frac{b}{2}\right)$

$=1-\frac{3ab}{8}=1-\frac{2}{8}$

$=\frac{3}{4}$

$\therefore\ b=\frac{3}{4}$

$b=\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하면

$3a\times\frac{3}{4}=2 \qquad \therefore\ a=\frac{8}{9}$

$\therefore\ a+b=\frac{8}{9}+\frac{3}{4}=\frac{59}{36}$

206

조건 (가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이고, $\mathrm{P}(-3\le X\le 3)=1$이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)=\frac{1}{2}$

이때 조건 (나)에서 $\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)=5\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)$이므로

$5\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)+\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)=\frac{1}{2}$

$6\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)=\frac{1}{12}$

따라서

$\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)=5\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)$

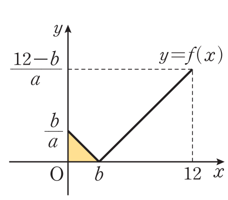
$=5\times\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$

이므로

$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\le X\le 0\right)=\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{12}$

207

$\mathrm{P}(0\le X\le b)=\frac{1}{10}$에서 $0<b<12$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$y=f(x)$의 그래프와 x축 및 y축, 직선 $x=12$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times b\times\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\times(12-b)\times\frac{12-b}{a}=1$

$\therefore\ a=b^2-12b+72$ ...... ㉠

이때 $\mathrm{P}(0\le X\le b)$는 앞의 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(0\le X\le b)=\frac{1}{10}$에서

$\frac{1}{2}\times b\times\frac{b}{a}=\frac{1}{10} \qquad \therefore\ a=5b^2$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$5b^2=b^2-12b+72,\ b^2+3b-18=0$

$(b+6)(b-3)=0$

$\therefore\ b=3\ (\because\ b>0)$

$b=3$을 ㉡에 대입하면 $a=45$

$\therefore\ f(x)=\frac{|x-3|}{45}\ (0\le x\le 12)$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{1}{b}\le X\le b\right)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le 3\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{1}{3}\right)\times\frac{\left|\frac{1}{3}-3\right|}{45}$

$=\frac{32}{405}$

208

$\mathrm{E}(Y)=4$이므로

$\mathrm{E}(aX+b)=4,\ a\mathrm{E}(X)+b=4$

$\therefore\ 3a+b=4$ ...... ㉠

$\mathrm{V}(Y)=1$이므로

$\mathrm{V}(aX+b)=1,\ a^2\mathrm{V}(X)=1$

$16a^2=1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{4}\ (\because\ a>0)$

$a=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{13}{4}$

$\therefore\ a-b=\frac{1}{4}-\frac{13}{4}=-3$

209

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{3}{k}$	$\frac{2}{k}$	1

확률의 총합은 1이므로

$\frac{2}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{2}{k}=1$

$\frac{9}{k}=1 \qquad \therefore\ k=9$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{2}{9}=\frac{32}{9}$

$\therefore\ \mathrm{E}(9X-4)=9\mathrm{E}(X)-4$

$=9\times\frac{32}{9}-4$

$=28$

210

$Y=\frac{1}{2}X+5$이므로

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}X+5\right)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+5=4$$

$\therefore \mathrm{E}(X)=-2$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2$

$\quad =20-4^2=4$

이므로

$$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+5\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{V}(X)=4$$

$\therefore \mathrm{V}(X)=16,$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{16}=4$

$\therefore \mathrm{E}(X)+\sigma(X)=-2+4=2$

211

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{8}+a+\frac{1}{8}+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{3}{4}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=2$이므로

$0\times\frac{1}{8}+1\times a+2\times\frac{1}{8}+3\times b=2$

$\therefore a+3b=\frac{7}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{2}$

이때 $\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{2}=\frac{21}{4}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\quad =\frac{21}{4}-2^2=\frac{5}{4}$

$\therefore \mathrm{V}(2X)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times\frac{5}{4}=5$

212

흰 공이 3개, 흰 공이 아닌 공이 3개이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20},$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20},$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20},$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2},$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{20}+1^2\times\frac{9}{20}+2^2\times\frac{9}{20}+3^2\times\frac{1}{20}=\frac{27}{10}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\quad =\frac{27}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{20}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{9}{20}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

1등급 비법

확률분포가 표로 주어지지 않은 경우에는 먼저 확률변수 X가 가질 수 있는 값에 대하여 그 각각의 확률을 구한 후, X의 확률분포를 표로 나타낸다. 이때

$\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n,$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2,$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

를 이용한다.

213

$a+b+c=6$에서

$c=6-a-b$ …… ㉠

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{a}{6}$	$\frac{b}{6}$	$\frac{6-a-b}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{4}{3}$이므로

$0\times\frac{a}{6}+1\times\frac{b}{6}+2\times\frac{6-a-b}{6}=\frac{4}{3}$

$\therefore 2a+b=4$ …… ㉡

$\mathrm{V}(X)=\frac{5}{9}$이므로

$0^2\times\frac{a}{6}+1^2\times\frac{b}{6}+2^2\times\frac{6-a-b}{6}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

$\therefore 4a+3b=10$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=2$

$a=1,\ b=2$를 ㉠에 대입하면 $c=3$

$\therefore a-b+c=1-2+3=2$

214

(i) $k=0,\ k=2$일 때,

$\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X=4)$

(ii) $k=1$일 때,

$\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=3)$

$\mathrm{P}(X=0)=a,\ \mathrm{P}(X=1)=b$라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	a	b	a	1

확률의 총합은 1이므로

$3a+2b=1$ ...... ㉠

$E(X^2)=\frac{35}{6}$이므로

$0^2\times a+1^2\times b+2^2\times a+3^2\times b+4^2\times a=\frac{35}{6}$

$\therefore\ 20a+10b=\frac{35}{6}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{4}$

$\therefore\ P(X=0)=\frac{1}{6}$

215

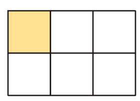
가로 방향의 평행선 3개 중 2개, 세로 방향의 평행선 4개 중 2개를 택할 때, 직사각형이 하나 만들어진다. 즉, 만들 수 있는 직사각형의 총개수는

${}_3C_2\times{}_4C_2=3\times 6=18$

직사각형의 넓이에 따라 경우를 나누어 생각하면 다음과 같다.

(i) 넓이가 1인 직사각형

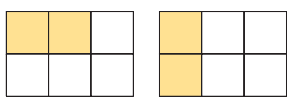
오른쪽 그림과 같은 직사각형이므로 그 개수는 6



(ii) 넓이가 2인 직사각형

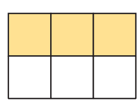
오른쪽 그림과 같은 직사각형이므로 그 개수는

$4+3=7$



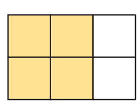
(iii) 넓이가 3인 직사각형

오른쪽 그림과 같은 직사각형이므로 그 개수는 2



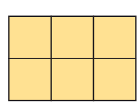
(iv) 넓이가 4인 직사각형

오른쪽 그림과 같은 직사각형이므로 그 개수는 2



(v) 넓이가 6인 직사각형

오른쪽 그림과 같은 직사각형이므로 그 개수는 1



이상에서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 6이고, 그 확률은 각각

$P(X=1)=\frac{6}{18}=\frac{1}{3},\ P(X=2)=\frac{7}{18},\ P(X=3)=\frac{2}{18}=\frac{1}{9},$

$P(X=4)=\frac{2}{18}=\frac{1}{9},\ P(X=6)=\frac{1}{18}$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{7}{18}+3\times\frac{1}{9}+4\times\frac{1}{9}+6\times\frac{1}{18}=\frac{20}{9},$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{7}{18}+3^2\times\frac{1}{9}+4^2\times\frac{1}{9}+6^2\times\frac{1}{18}=\frac{20}{3}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{20}{3}-\left(\frac{20}{9}\right)^2=\frac{140}{81}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{140}{81}}=\frac{2\sqrt{35}}{9}$이므로

$\sigma(3-9X)=9\sigma(X)=9\times\frac{2\sqrt{35}}{9}=2\sqrt{35}$

216

확률변수 X가 이항분포 $B\left(7,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_7C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{7-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$

$\therefore\ P(X\le 6)=1-P(X=7)$

$=1-{}_7C_7\left(\frac{4}{5}\right)^7\left(\frac{1}{5}\right)^0$

$=1-\left(\frac{4}{5}\right)^7$

217

$P(X=x)={}_{49}C_x\frac{6^x}{7^{49}}$

$={}_{49}C_x\left(\frac{6}{7}\right)^x\left(\frac{1}{7}\right)^{49-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 49)$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(49,\ \frac{6}{7}\right)$을 따른다.

$\therefore\ E(X)=49\times\frac{6}{7}=42$

218

$E(X)=10,\ \sigma(X)=\sqrt{6}$이므로

$np=10$ ...... ㉠

$\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{6}$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\sqrt{10(1-p)}=\sqrt{6},\ 1-p=\frac{3}{5}$

$\therefore\ p=\frac{2}{5}$

$p=\frac{2}{5}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{5}n=10\qquad\therefore\ n=25$

219

확률변수 X가 이항분포 $B(9,\ p)$를 따르므로

$E(X)=9p,\ V(X)=9p(1-p)$

$E\left(\left(\frac{X}{2}-1\right)\left(\frac{X}{2}+1\right)\right)=\frac{7}{4}$에서

$E\left(\frac{X^2}{4}-1\right)=\frac{7}{4},\ \frac{1}{4}E(X^2)-1=\frac{7}{4}$

$\therefore\ E(X^2)=11$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$9p(1-p)=11-(9p)^2$

$72p^2+9p-11=0$, $(24p+11)(3p-1)=0$

$\therefore p=\frac{1}{3}$ $(\because p>0)$

$\therefore \mathrm{V}(X)=9\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=2$

220

4개의 동전을 동시에 던지는 시행을 48회 반복하므로 48회의 독립시행이다.

4개의 동전을 한 번 던질 때 3개는 앞면, 1개는 뒷면이 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=48\times\frac{1}{4}=12$,

$\mathrm{V}(X)=48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=9$,

$\sigma(X)=\sqrt{9}=3$

$\therefore \mathrm{E}(X)+\sigma(X)=12+3=15$

221

눈의 수 m, n의 순서쌍 (m, n)에 대하여

$E=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2),$
$(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4),$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

이므로 $\mathrm{P}(E)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(24, \frac{5}{12}\right)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=24\times\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}$
$=\frac{35}{6}$

$\therefore \mathrm{V}(6X-5)=6^2\mathrm{V}(X)$
$=36\times\frac{35}{6}$
$=210$

222

정답을 맞힌 문항 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=20\times\frac{1}{5}=4$

시험 점수를 확률변수 Y라 하고 틀린 문항당 a점을 감점한다고 하면

$Y=5X-a(20-X)$
$=(5+a)X-20a$

이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}((5+a)X-20a)$
$=(5+a)\mathrm{E}(X)-20a$
$=(5+a)\times4-20a$
$=-16a+20$

이때 $\mathrm{E}(Y)=0$이려면

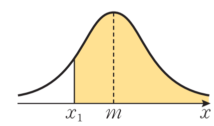
$-16a+20=0$ $\quad\therefore a=1.25$

따라서 틀린 문항당 1.25점을 감점해야 한다.

223

ㄱ. 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(X\geq m)=\mathrm{P}(X\leq m)=0.5$ (거짓)

ㄷ. $x_1<m$일 때,
$\mathrm{P}(X\geq x_1)$
$=\mathrm{P}(x_1\leq X\leq m)+\mathrm{P}(X\geq m)$
$=\mathrm{P}(x_1\leq X\leq m)+0.5$ (거짓)



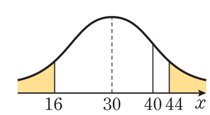
이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

1등급 비법

평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용한다.

224

정규분포곡선은 직선 $x=30$에 대하여 대칭이므로



$\mathrm{P}(X\geq44)=\mathrm{P}(X\leq16)=0.24$이고

$\mathrm{P}(X\geq40)$
$=\mathrm{P}(40\leq X\leq44)+\mathrm{P}(X\geq44)$
$=0.08+0.24=0.32$

$\therefore \mathrm{P}(16\leq X\leq40)$
$=\mathrm{P}(16\leq X\leq30)+\mathrm{P}(30\leq X\leq40)$
$=\{\mathrm{P}(X\leq30)-\mathrm{P}(X\leq16)\}+\{\mathrm{P}(X\geq30)-\mathrm{P}(X\geq40)\}$
$=(0.5-0.24)+(0.5-0.32)$
$=0.26+0.18$
$=0.44$

225

$m=20$, $\sigma=2$이므로

$\mathrm{P}(18\leq X\leq24)$
$=\mathrm{P}(20-2\leq X\leq20+2\times2)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma\leq X\leq m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-\sigma\leq X\leq m)+\mathrm{P}(m\leq X\leq m+2\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\leq X\leq m+\sigma)+\mathrm{P}(m\leq X\leq m+2\sigma)$
$=0.3413+0.4772$
$=0.8185$

226

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(20, 5^2)$, $\mathrm{N}(30, 7^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-20}{5}$, $Z_Y=\frac{Y-30}{7}$

으로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(25\le X\le 30)=P(37\le Y\le k)$에서

$P\left(\frac{25-20}{5}\le Z_X\le\frac{30-20}{5}\right)=P\left(\frac{37-30}{7}\le Z_Y\le\frac{k-30}{7}\right)$

$\therefore P(1\le Z_X\le 2)=P\left(1\le Z_Y\le\frac{k-30}{7}\right)$

따라서 $\frac{k-30}{7}=2$이므로

$k-30=14 \qquad \therefore k=44$

227

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(3, 2^2)$, $N(m, 2^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-3}{2}$, $Z_Y=\frac{Y-m}{2}$

으로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$2P(2\le X\le 3)\le P(2-m\le Y\le 3m-2)$에서

$2P\left(\frac{2-3}{2}\le Z_X\le\frac{3-3}{2}\right)$

$\le P\left(\frac{(2-m)-m}{2}\le Z_Y\le\frac{(3m-2)-m}{2}\right)$

$2P\left(-\frac{1}{2}\le Z_X\le 0\right)\le P(1-m\le Z_Y\le m-1)$

$P\left(-\frac{1}{2}\le Z_X\le\frac{1}{2}\right)\le P(1-m\le Z_Y\le m-1)$

이때 $1-m=-(m-1)$이므로

$\frac{1}{2}\le m-1 \qquad \therefore m\ge\frac{3}{2}$

따라서 m의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

228

확률변수 X가 정규분포 $N(5, 9)$, 즉 $N(5, 3^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-5}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(2\le X\le k)=0.82$에서

$P\left(\frac{2-5}{3}\le Z\le\frac{k-5}{3}\right)=0.82$

$P\left(-1\le Z\le\frac{k-5}{3}\right)=0.82$

$P(-1\le Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{k-5}{3}\right)=0.82$

$P(0\le Z\le 1)+P\left(0\le Z\le\frac{k-5}{3}\right)=0.82$

$0.34+P\left(0\le Z\le\frac{k-5}{3}\right)=0.82$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{k-5}{3}\right)=0.48$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$\frac{k-5}{3}=2$, $k-5=6 \qquad \therefore k=11$

229

확률변수 X가 정규분포 $N(25, 4^2)$을 따르므로

$E(X)=25$, $\sigma(X)=4$에서

$$\begin{aligned}E(Y)&=E(4X-3)\\&=4E(X)-3\\&=4\times25-3=97,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(Y)&=\sigma(4X-3)\\&=4\sigma(X)\\&=4\times4=16\end{aligned}$$

즉, 확률변수 Y는 정규분포 $N(97, 16^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-97}{16}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(Y\le 105)&=P\left(Z\le\frac{105-97}{16}\right)\\&=P(Z\le 0.5)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5+0.1915\\&=0.6915\end{aligned}$$

다른 풀이 $Y=4X-3$이므로

$P(Y\le 105)=P(4X-3\le 105)=P(X\le 27)$

$Z=\frac{X-25}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(Y\le 105)&=P(X\le 27)\\&=P\left(Z\le\frac{27-25}{4}\right)\\&=P(Z\le 0.5)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5+0.1915\\&=0.6915\end{aligned}$$

230

지현이네 반 전체 학생의 국어, 영어, 수학 시험 성적을 각각 확률변수 X_A, X_B, X_C라 하면 X_A, X_B, X_C는 각각 정규분포 $N(65, 10^2)$, $N(72, 9^2)$, $N(68, 7^2)$을 따르므로

$Z_A=\frac{X_A-65}{10}$, $Z_B=\frac{X_B-72}{9}$, $Z_C=\frac{X_C-68}{7}$

로 놓으면 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

다른 학생들이 지현이보다 국어, 영어, 수학 시험 성적이 높을 확률은 각각

$$\begin{aligned}P(X_A>74)&=P\left(Z_A>\frac{74-65}{10}\right)\\&=P\left(Z_A>\frac{9}{10}\right),\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(X_B>80)=\mathrm{P}\left(Z_B>\frac{80-72}{9}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z_B>\frac{8}{9}\right)$,

$\mathrm{P}(X_C>75)=\mathrm{P}\left(Z_C>\frac{75-68}{7}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_C>1)$

이때 $\mathrm{P}\left(Z_B>\frac{8}{9}\right)>\mathrm{P}\left(Z_A>\frac{9}{10}\right)>\mathrm{P}(Z_C>1)$이므로

$\mathrm{P}(X_B>80)>\mathrm{P}(X_A>74)>\mathrm{P}(X_C>75)$

따라서 확률이 낮은 과목일수록 상대적으로 지현이의 성적이 좋은 것이므로 지현이의 성적이 상대적으로 가장 좋은 과목은 수학이다.

1등급 비법

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m_X, \sigma_X^2)$, $\mathrm{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$을 따를 때, X, Y를 $Z_X=\frac{X-m_X}{\sigma_X}$, $Z_Y=\frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}$로 각각 표준화하여 확률을 비교한다.

⇨ $0<a<b$이면 $\mathrm{P}(Z\geq a)>\mathrm{P}(Z\geq b)$

231

수험생의 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(68, 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-68}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(55\leq X\leq 78)=\mathrm{P}\left(\frac{55-68}{10}\leq Z\leq\frac{78-68}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.3\leq Z\leq 1)$

$=\mathrm{P}(-1.3\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.3)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=0.4032+0.3413$

$=0.7445$

232

국주가 등교하는 데 걸리는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(25, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-25}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

집에서 7시 35분에 출발한 국주가 학교에 7시 50분 이내에 도착하려면 $X\leq 15$이어야 하므로 국주가 지각하지 않을 확률은

$\mathrm{P}(X\leq 15)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{15-25}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq -2.5)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 2.5)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2.5)$

$=0.5-0.4938=0.0062$

233

응시자들의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(350, 40^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-350}{40}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a점이라 하면

$\mathrm{P}(X\geq a)=\frac{800}{2000}=0.4$에서

$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-350}{40}\right)=0.4$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-350}{40}\right)=0.4$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-350}{40}\right)=0.1$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.25)=0.1$이므로

$\frac{a-350}{40}=0.25$, $a-350=10$

$\therefore a=360$

따라서 합격자의 최저 점수는 360점이다.

1등급 비법

정규분포를 활용하여 최저 점수 구하기

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 상위 k % 안에 속하는 X의 최솟값은 다음과 같이 구한다.

(i) 상위 k % 안에 속하는 X의 최솟값을 a라 한다.

⇨ $\mathrm{P}(X\geq a)=\frac{k}{100}$

(ii) X를 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 표준화한다.

⇨ $\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-m}{\sigma}\right)=\frac{k}{100}$

(iii) 표준정규분포표를 이용하여 a의 값을 구한다.

234

이 공장에서 생산한 두 제품 A, B의 중량을 각각 확률변수 X, Y라 하면 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(500, 10^2)$, $\mathrm{N}(520, 8^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-500}{10}$, $Z_Y=\frac{Y-520}{8}$

으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 각각 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq 480)=\mathrm{P}(Y\leq k)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\geq\frac{480-500}{10}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\leq\frac{k-520}{8}\right)$

$\mathrm{P}(Z_X\geq -2)=\mathrm{P}\left(Z_Y\leq\frac{k-520}{8}\right)$

$\mathrm{P}(Z_X\leq 2)=\mathrm{P}\left(Z_Y\leq\frac{k-520}{8}\right)$

따라서 $\frac{k-520}{8}=2$이므로

$k-520=16$ $\quad\therefore k=536$

235

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(64, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=64\times\frac{1}{2}=32$,

$\mathrm{V}(X)=64\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=16$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-32}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(28\le X\le 36)&=\mathrm{P}\left(\frac{28-32}{4}\le Z\le \frac{36-32}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=2\times 0.34=0.68\end{aligned}$$

236

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=48\times\frac{3}{4}=36,$

$\mathrm{V}(X)=48\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=9$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(36,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-36}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge 45)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{45-36}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 3)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 3)\\&=0.5-0.4987\\&=0.0013\end{aligned}$$

237

생산한 제품 400개 중 불량품의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.1)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times 0.1=40,$

$\mathrm{V}(X)=400\times 0.1\times 0.9=36$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 49)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{49-40}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5+0.4332\\&=0.9332\end{aligned}$$

238

예약을 하고 강연장에 나오지 않는 사람의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(900,\ 0.2)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=900\times 0.2=180,$

$\mathrm{V}(X)=900\times 0.2\times 0.8=144$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 12^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-180}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

예약을 하고 강연장에 나온 모든 사람이 좌석에 앉아 강연을 들을 수 있으려면 예약을 취소하는 사람이 $900-750=150$(명) 이상이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 150)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{150-180}{12}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)\\&=0.5+0.4938\\&=0.9938\end{aligned}$$

239

게임을 1800번 시행하여 5점을 얻은 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1800,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=1800\times\frac{1}{3}=600,$

$\mathrm{V}(X)=1800\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=400$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(600,\ 20^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-600}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한편, 1점을 잃은 횟수는 $1800-X$이므로 얻은 점수가 1860점 이상이려면

$5X-(1800-X)\ge 1860$

$6X\ge 3660\qquad \therefore X\ge 610$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 610)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{610-600}{20}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5-0.1915\\&=0.3085\end{aligned}$$

240

주사위를 16200번 던졌을 때 5 이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상일 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16200,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=16200\times\frac{1}{3}=5400,$

$\quad\mathrm{V}(X)=16200\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=3600$

즉, X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(5400,\ 60^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-5400}{60}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한편, 4 이하의 눈이 나오는 횟수는 $16200-X$이므로 점 A의 위치가 5700 이하이려면

$(16200-X)-X\le 5700$

$2X \geq 10500$

$\therefore X \geq 5250$

따라서 점 A의 위치가 5700 이하일 확률은

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \geq 5250) &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{5250-5400}{60}\right) \\ &= \mathrm{P}(Z \geq -2.5) \\ &= \mathrm{P}(Z \leq 2.5) \\ &= \mathrm{P}(Z \leq 0) + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.5 + 0.494 \\ &= 0.994 \end{aligned}$$

따라서 $k=0.994$이므로

$1000 \times k = 1000 \times 0.994 = 994$

내신 적중 서술형

● 69쪽

241 $\frac{9}{16}$ **242** (1) $\frac{2}{7}$ (2) 풀이 참조 (3) $\frac{8}{7}$ **243** 150

244 80.8

241

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2} \times 1 \times a + 1 \times a + \frac{1}{2} \times 1 \times a = 1$

$2a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$ ...... ㉮

$\mathrm{P}(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(0 \leq X \leq 2) = \frac{3}{4}$에서 $1<b<2$이므로

$\mathrm{P}(0 \leq X \leq b) = \frac{1}{4} + (b-1) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$\frac{b}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \quad \therefore b = \frac{5}{4}$ ...... ㉯

$$\begin{aligned} \therefore\ & \mathrm{P}(b \leq X \leq 2b) \\ &= \mathrm{P}\left(\frac{5}{4} \leq X \leq \frac{5}{2}\right) \\ &= \left(2-\frac{5}{4}\right) \times \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(3-\frac{5}{2}\right) \times \frac{1}{4}\right\} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{3}{16} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$ ...... ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ a의 값 구하기	30 %
㉯ b의 값 구하기	40 %
㉰ $\mathrm{P}(b \leq X \leq 2b)$ 구하기	30 %

242

(1) 7개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$_7\mathrm{C}_2 = 21$

이때 2개의 공이 모두 검은 공인 경우의 수는

$_4\mathrm{C}_2 = 6$

$\therefore \mathrm{P}(X=2) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ ...... ㉮

(2) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0) = \frac{_4\mathrm{C}_0 \times {_3\mathrm{C}_2}}{_7\mathrm{C}_2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$,

$\mathrm{P}(X=1) = \frac{_4\mathrm{C}_1 \times {_3\mathrm{C}_1}}{_7\mathrm{C}_2} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$,

$\mathrm{P}(X=2) = \frac{2}{7}$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

...... ㉯

(3) $\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$ ...... ㉰

	채점 기준	배점 비율
(1)	㉮ $\mathrm{P}(X=2)$ 구하기	30 %
(2)	㉯ 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내기	40 %
(3)	㉰ $\mathrm{E}(X)$ 구하기	30 %

243

부품 A가 불량품이 아닐 확률은 $1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$,

부품 B가 불량품이 아닐 확률은 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$이므로

두 부품 A, B가 모두 불량품이 아닐 확률은

$\frac{9}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3}{4}$ ...... ㉮

따라서 전자 제품이 두 부품 A 또는 B로 인하여 불량일 확률은

$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(800, \frac{1}{4}\right)$을 따른다. ...... ㉯

$\therefore \mathrm{V}(X) = 800 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 150$ ...... ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 두 부품 A, B가 모두 불량품이 아닐 확률 구하기	30 %
㉯ 확률변수 X가 따르는 이항분포 구하기	40 %
㉰ $\mathrm{V}(X)$ 구하기	30 %

244

'확률과 통계' 과목의 학기말 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(68, 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-68}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다. ...... ㉮

1등급을 받을 수 있는 점수를 k점이라 하면

$P(X \geq k) \leq 0.1$에서 …… ㉯

$P\left(Z \geq \frac{k-68}{10}\right) \leq 0.1$

$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-68}{10}\right) \leq 0.1$

$P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-68}{10}\right) \geq 0.4$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.28) = 0.4$이므로

$\frac{k-68}{10} \geq 1.28$, $k-68 \geq 12.8$

$\therefore k \geq 80.8$

따라서 최저 점수는 80.8점이므로

$m = 80.8$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 확률변수 X를 정하고 표준화하기	40 %
㉯ 1등급을 받을 수 있는 점수의 범위 구하기	40 %
㉰ m의 값 구하기	20 %

1등급 실력 완성

● 70쪽 ~ 72쪽

245 ⑤ **246** 4 **247** 24 **248** 219 **249** ③
250 ② **251** 30 **252** 673 **253** 25
254 0.16 **255** ⑤ **256** 485

245

이산확률변수와 확률질량함수

전략 확률변수 X가 가질 수 있는 값을 찾고 각 경우의 확률을 구하여 확률분포를 표로 나타낸다.

풀이 주사위는 최대 2개 던지므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(i) $X=0$일 때,

동전은 뒷면이 나오고 주사위 1개를 던져 나온 눈의 수가 짝수가 아닐 확률은

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

동전은 앞면이 나오고 주사위 2개를 던져 나온 눈의 수가 모두 짝수가 아닐 확률은

$\frac{1}{2} \times {}_2C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$

$\therefore P(X=0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

(ii) $X=1$일 때,

동전은 뒷면이 나오고 주사위 1개를 던져 나온 눈의 수가 짝수일 확률은

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

동전은 앞면이 나오고 주사위 2개를 던져 나온 눈의 수 중에서 짝수가 1개일 확률은

$\frac{1}{2} \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}$

$\therefore P(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

(iii) $X=2$일 때,

동전은 뒷면이 나올 때, 주사위의 눈의 수가 짝수 2개가 나오는 경우는 없다.

동전은 앞면이 나오고 주사위 2개를 던져 나온 눈의 수가 짝수 2개일 확률은

$\frac{1}{2} \times {}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

$\therefore P(X=2) = \frac{1}{8}$

이상에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1

한편, $X^2 - X = 0$에서

$X(X-1) = 0$

$\therefore X=0$ 또는 $X=1$

$$\begin{aligned}\therefore P(X^2-X=0) &= P(X=0 \text{ 또는 } X=1) \\ &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}\end{aligned}$$

다른 풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고

$P(X=2) = \frac{1}{8}$이므로

$$\begin{aligned}P(X^2-X=0) &= P(X=0 \text{ 또는 } X=1) \\ &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= 1 - P(X=2) \\ &= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}\end{aligned}$$

246

연속확률변수와 확률밀도함수

전략 연속확률변수의 성질을 이용할 수 있도록 주어진 관계식의 x에 적절한 값을 넣어 조건을 찾는다.

풀이 $P(0 \leq X \leq 4) = 1$에서

$16a + 4b = 1$ …… ㉠

$P(1 \leq X \leq 2) = \frac{7}{32}$에서

$P(0 \leq X \leq 2) - P(0 \leq X \leq 1) = \frac{7}{32}$

$(4a+2b) - (a+b) = \frac{7}{32}$

$\therefore 3a+b=\frac{7}{32}$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{32}$, $b=\frac{1}{8}$

$\therefore \frac{b}{a}=32\times\frac{1}{8}=4$

247

연속확률변수와 확률밀도함수

전략 주어진 확률밀도함수의 그래프의 대칭성과 확률의 총합은 1임을 이용한다.

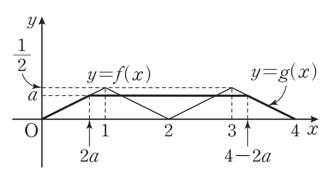
풀이 $\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0$에서

$g(x)=f(x)$ 또는 $g(x)=a$

두 조건 (가), (나)를 만족시키려면 $0\le x\le 1$, $3\le x\le 4$에서 $y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분이 있어야 하므로

$0<a<\frac{1}{2}$

따라서 확률밀도함수 $g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 2a\times a+(4-4a)\times a+\frac{1}{2}\times 2a\times a=1$

$2a^2-4a+1=0$ $\quad\therefore a=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\ \left(\because 0<a<\frac{1}{2}\right)$

$1<5a<2$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0\le Y\le 5a)&=\mathrm{P}(0\le Y\le 2a)+\mathrm{P}(2a\le Y\le 5a)\\&=\frac{1}{2}\times 2a\times a+3a\times a=4a^2\\&=4\times\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2\\&=6-4\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $p=6$, $q=4$이므로

$p\times q=6\times 4=24$

248

이산확률변수의 기댓값(평균), 분산, 표준편차

전략 각 경우의 확률을 구하여 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

풀이 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{60}$에서 검은 구슬이 2개이려면 동전 2개를 던졌을 때 모두 앞면이 나오고 주머니에서 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 구슬이어야 한다.

10개의 구슬 중 검은 구슬의 개수를 x라 하면 흰 구슬의 개수는 $10-x$이므로

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{{}_{x}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{60}$

$\frac{1}{4}\times\frac{x(x-1)}{90}=\frac{1}{60}$

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because x\ge 0)$

즉, 주머니 속에는 흰 구슬 7개, 검은 구슬 3개가 들어 있다.

이때 $X=1$인 경우는 다음과 같다.

(i) 동전 2개를 던져 앞면이 1개 나오고 주머니에서 꺼낸 1개의 구슬이 검은 구슬일 확률은

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{{}_{3}\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_1}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$

(ii) 동전 2개를 던져 모두 앞면이 나오고 주머니에서 꺼낸 2개의 구슬 중 1개만 검은 구슬일 확률은

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{{}_{3}\mathrm{C}_1\times{}_{7}\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{4}\times\frac{7}{15}=\frac{7}{60}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{20}+\frac{7}{60}=\frac{4}{15}$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=0)&=1-\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\}\\&=1-\left(\frac{4}{15}+\frac{1}{60}\right)\\&=\frac{43}{60}\end{aligned}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{43}{60}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{60}$	1

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{43}{60}+1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{1}{60}=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{43}{60}+1^2\times\frac{4}{15}+2^2\times\frac{1}{60}=\frac{1}{3}$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{1}{3}-\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{73}{300}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{V}(30X)&=30^2\mathrm{V}(X)\\&=900\times\frac{73}{300}\\&=219\end{aligned}$$

249

이항분포

전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르면 $\mathrm{P}(X=x)={}_{n}\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, n)$임을 이용한다.

풀이 소수가 적힌 공을 꺼낼 확률은

$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

주머니에서 한 개의 공을 꺼내는 시행을 20회 반복했을 때 소수가 적힌 공을 꺼내는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(20, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$P(X=x)={}_{20}C_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{20-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 20)$

따라서 구하는 상금의 기댓값은

$$\begin{aligned}&{}_{20}C_0\left(\frac{3}{5}\right)^{20}+16\times{}_{20}C_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^{19}+16^2\times{}_{20}C_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{18}\\&\qquad+\cdots+16^{20}\times{}_{20}C_{20}\left(\frac{2}{5}\right)^{20}\\&={}_{20}C_0\left(\frac{3}{5}\right)^{20}+{}_{20}C_1\left(\frac{32}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^{19}+{}_{20}C_2\left(\frac{32}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{18}\\&\qquad+\cdots+{}_{20}C_{20}\left(\frac{32}{5}\right)^{20}\\&=\left(\frac{32}{5}+\frac{3}{5}\right)^{20}\\&=7^{20}(\text{원})\end{aligned}$$

개념 보충

이항정리

자연수 n에 대하여

$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_nb^n$

250

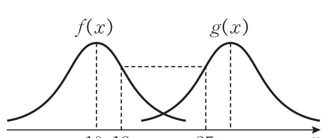
정규분포 ⊕ 표준정규분포

전략 정규분포를 따르는 두 확률변수의 표준편차가 같으면 그에 대한 두 확률밀도함수의 그래프도 평행이동에 의하여 포개어짐을 이용한다.

풀이 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같으므로 두 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 평행이동에 의하여 포개어진다.

또, $f(x)$의 그래프는 직선 $x=10$에 대하여 대칭이고, $g(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

한편, 확률변수 Y가 정규분포 $N(m, 4^2)$을 따르고, $P(Y\ge27)\ge0.5$이므로 $m\ge27$



이때 $f(13)=g(27)$이므로 위의 그림에서

$m=27+3=30$

즉, 확률변수 Y는 정규분포 $N(30, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-30}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(Y\le24)&=P\left(Z\le\frac{24-30}{4}\right)\\&=P(Z\le-1.5)\\&=P(Z\ge1.5)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

251

정규분포 ⊕ 표준정규분포

전략 주어진 정규분포에 대한 조건을 표준정규분포로 바꾸어 비교한다.

풀이 $P(X\le m)+P(Y\ge m^2+8m+10)=1$에서

$0.5+P(Y\ge m^2+8m+10)=1$

$P(Y\ge m^2+8m+10)=0.5$

$\therefore m'=m^2+8m+10$

이때

$Z_X=\frac{X-m}{2}$, $Z_Y=\frac{Y-m'}{\sigma}$

으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 각각 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(X\le2m)=P(Y\ge2)$에서

$P\left(Z_X\le\frac{2m-m}{2}\right)=P\left(Z_Y\ge\frac{2-m'}{\sigma}\right)$

$P\left(Z_X\le\frac{m}{2}\right)=P\left(Z_Y\ge\frac{-m^2-8m-8}{\sigma}\right)$

$\frac{m}{2}=\frac{m^2+8m+8}{\sigma}$

$\therefore \sigma=2m+\frac{16}{m}+16$ ...... ㉠

두 자연수 m, σ에 대하여 ㉠이 성립하므로 m은 16의 양의 약수이어야 한다.

$m=1$일 때, $\sigma=34$이므로 $m+\sigma=35$

$m=2$일 때, $\sigma=28$이므로 $m+\sigma=30$

$m=4$일 때, $\sigma=28$이므로 $m+\sigma=32$

$m=8$일 때, $\sigma=34$이므로 $m+\sigma=42$

$m=16$일 때, $\sigma=49$이므로 $m+\sigma=65$

따라서 구하는 $m+\sigma$의 최솟값은 30이다.

252

정규분포 ⊕ 표준정규분포

전략 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $N(1, t^2)$ $(t>0)$을 따르고 $P(X\le5t)\ge\frac{1}{2}$이므로

$5t\ge1$ $\qquad\therefore t\ge\frac{1}{5}$ ...... ㉠

이때 $Z=\frac{X-1}{t}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&P(t^2-t+1\le X\le t^2+t+1)\\&=P\left(\frac{(t^2-t+1)-1}{t}\le Z\le\frac{(t^2+t+1)-1}{t}\right)\\&=P(t-1\le Z\le t+1)\end{aligned}$$ ...... ㉡

$|(t+1)-(t-1)|=2$로 일정하므로 $\frac{(t-1)+(t+1)}{2}$, 즉 t의 값이 확률변수 Z의 평균 0에 가까울수록 ㉡의 값은 최대가 된다.

즉, ㉠에서 $t\ge\frac{1}{5}$이므로 $t=\frac{1}{5}$일 때 ㉡은 최댓값을 갖는다.

따라서 $P(t^2-t+1\le X\le t^2+t+1)$의 최댓값은

$$P\left(\frac{1}{5}-1\le Z\le\frac{1}{5}+1\right)=P(-0.8\le Z\le 1.2)$$
$$=P(0\le Z\le 0.8)+P(0\le Z\le 1.2)$$
$$=0.288+0.385$$
$$=0.673$$

이므로 $k=0.673$

$\therefore\ 1000\times k=1000\times 0.673=673$

253

표준정규분포

(전략) 정규분포를 따르는 두 확률변수를 각각 표준화하여 관계식을 구한다.

(풀이) 확률변수 X는 정규분포 $N(m_1, \sigma_1{}^2)$을 따르므로

$Z_1=\dfrac{X-m_1}{\sigma_1}$로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le x)=P(X\ge 40-x)$에서

$$P\left(Z_1\le\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)=P\left(Z_1\ge\frac{(40-x)-m_1}{\sigma_1}\right)$$

$$\frac{x-m_1}{\sigma_1}=-\frac{40-x-m_1}{\sigma_1}$$

$2m_1=40\qquad\therefore\ m_1=20$

또, 확률변수 Y는 정규분포 $N(m_2, \sigma_2{}^2)$을 따르므로 $Z_2=\dfrac{Y-m_2}{\sigma_2}$로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(Y\le x)=P(X\le x+10)$에서

$$P\left(Z_2\le\frac{x-m_2}{\sigma_2}\right)=P\left(Z_1\le\frac{(x+10)-20}{\sigma_1}\right)$$

이때 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\frac{x-m_2}{\sigma_2}=\frac{x-10}{\sigma_1}$$

$\therefore\ (\sigma_1-\sigma_2)x-\sigma_1 m_2+10\sigma_2=0$

따라서 $\sigma_1-\sigma_2=0$, $-\sigma_1 m_2+10\sigma_2=0$이므로

$\sigma_1=\sigma_2$, $m_2=10$

$\therefore\ P(15\le X\le 20)+P(15\le Y\le 20)$

$$=P\left(\frac{15-20}{\sigma_1}\le Z_1\le\frac{20-20}{\sigma_1}\right)+P\left(\frac{15-10}{\sigma_2}\le Z_2\le\frac{20-10}{\sigma_2}\right)$$
$$=P\left(-\frac{5}{\sigma_1}\le Z_1\le 0\right)+P\left(\frac{5}{\sigma_2}\le Z_2\le\frac{10}{\sigma_2}\right)$$
$$=P\left(-\frac{5}{\sigma_2}\le Z_2\le 0\right)+P\left(\frac{5}{\sigma_2}\le Z_2\le\frac{10}{\sigma_2}\right)$$
$$=P\left(0\le Z_2\le\frac{5}{\sigma_2}\right)+P\left(\frac{5}{\sigma_2}\le Z_2\le\frac{10}{\sigma_2}\right)$$
$$=P\left(0\le Z_2\le\frac{10}{\sigma_2}\right)$$
$$=0.4772$$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{10}{\sigma_2}=2\qquad\therefore\ \sigma_2=5$

$\therefore\ m_1+\sigma_2=20+5=25$

254

표준정규분포 + 이항분포와 정규분포의 관계

(전략) 달걀 1개의 무게를 확률변수 X, 특란의 개수를 확률변수 Y로 놓고, 확률을 구한다.

(풀이) 달걀 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(50, 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

달걀이 특란일 확률은

$$P(X\ge 60)=P\left(Z_X\ge\frac{60-50}{5}\right)$$
$$=P(Z_X\ge 2)$$
$$=P(Z_X\ge 0)-P(0\le Z_X\le 2)$$
$$=0.5-0.48$$
$$=0.02$$

임의로 택한 2500개의 달걀 중 특란의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B(2500, 0.02)$를 따르므로

$E(Y)=2500\times 0.02=50$,

$V(Y)=2500\times 0.02\times 0.98=49$

즉, Y는 근사적으로 정규분포 $N(50, 7^2)$을 따르므로 $Z_Y=\dfrac{Y-50}{7}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 특란의 개수가 57 이상일 확률은

$$P(Y\ge 57)=P\left(Z_Y\ge\frac{57-50}{7}\right)$$
$$=P(Z_Y\ge 1)$$
$$=P(Z_Y\ge 0)-P(0\le Z_Y\le 1)$$
$$=0.5-0.34$$
$$=0.16$$

255

이항분포와 정규분포의 관계

(전략) 주어진 조건을 이용하여 n, p의 값을 구한 후 이항분포와 정규분포의 관계를 이용한다.

(풀이) 이항분포 $B(n, p)$를 따르는 확률변수 X의 분산이 $\dfrac{100}{9}$이므로

$np(1-p)=\dfrac{100}{9}$ …… ㉠

또, $P(X=x)={}_{n}C_{x}p^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, n)$이고,

$P(X=n-1)=16P(X=n)$이므로

${}_{n}C_{n-1}p^{n-1}(1-p)=16\times{}_{n}C_{n}p^n$

$\therefore\ n(1-p)=16p$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$16p^2=\dfrac{100}{9}\qquad\therefore\ p=\dfrac{5}{6}\ (\because\ p>0)$

$p=\dfrac{5}{6}$를 ㉡에 대입하면

$n\times\dfrac{1}{6}=16\times\dfrac{5}{6}\qquad\therefore\ n=80$

즉, X가 이항분포 $B\left(80, \frac{5}{6}\right)$를 따르고

$E(X)=80\times\frac{5}{6}=\frac{200}{3}$,

$V(X)=\frac{100}{9}$

이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{200}{3}, \left(\frac{10}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{X-\frac{200}{3}}{\frac{10}{3}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$
\begin{aligned}
P(X\ge 60)&=P\left(Z\ge\frac{60-\frac{200}{3}}{\frac{10}{3}}\right)\\
&=P(Z\ge -2)\\
&=P(Z\le 2)\\
&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\
&=0.5+0.4772\\
&=0.9772
\end{aligned}
$$

256

이항분포와 정규분포의 관계

전략 $P(A)$를 구하여 확률변수 X가 따르는 이항분포를 구한 후 이항분포와 정규분포의 관계를 이용한다.

풀이 3개의 주사위의 눈의 수가 모두 다를 확률은

$\frac{6\times5\times4}{6^3}=\frac{5}{9}$

$\therefore P(A)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{4}{9}\right)$를 따르므로

$E(X)=n\times\frac{4}{9}=\frac{4}{9}n$,

$V(X)=n\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{20}{81}n$

$E(X)+V(X)\le 280$에서

$\frac{4}{9}n+\frac{20}{81}n\le 280$

$\frac{56}{81}n\le 280 \qquad \therefore n\le 405$ ⋯⋯ ㉠

X는 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{4}{9}n, \left(\frac{2\sqrt{5n}}{9}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-\frac{4}{9}n}{\frac{2\sqrt{5n}}{9}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P\left(X\ge\frac{n}{3}\right)\ge 0.9772$에서

$P\left(Z\ge\dfrac{\frac{n}{3}-\frac{4}{9}n}{\frac{2\sqrt{5n}}{9}}\right)\ge 0.9772$

$P\left(Z\ge -\frac{n}{2\sqrt{5n}}\right)\ge 0.9772$

$P\left(Z\le \frac{n}{2\sqrt{5n}}\right)\ge 0.9772$

$P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le \frac{n}{2\sqrt{5n}}\right)\ge 0.9772$

$0.5+P\left(0\le Z\le \frac{n}{2\sqrt{5n}}\right)\ge 0.9772$

$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{n}{2\sqrt{5n}}\right)\ge 0.4772$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{n}{2\sqrt{5n}}\ge 2$

$n\ge 4\sqrt{5n}$, $n^2\ge 80n$

$\therefore n\ge 80$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $80\le n\le 405$

따라서 자연수 n의 최댓값은 405, 최솟값은 80이므로 구하는 합은

$405+80=485$

도전 1등급 최고난도

● 73쪽

257 214 **258** ③ **259** ②

257

이산확률변수와 확률질량함수

1단계 3개의 공의 색이 모두 같은 경우의 확률변수의 값과 그 확률을 구한다.

주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

(i) 3개의 공이 모두 흰 공인 경우

3개의 공에 적힌 수가 2, 3, 5이므로

$X=1$이고 $P(X=1)=\frac{1}{35}$

2+3+5, 즉 10을 3으로 나누었을 때의 나머지

(ii) 3개의 공이 모두 검은 공인 경우

3개의 공에 적힌 수가 1, 2, 8 또는 2, 4, 8이면

$X=2$이고 $P(X=2)=\frac{2}{35}$

또, 3개의 공에 적힌 수가 1, 2, 4 또는 1, 4, 8이면

$X=1$이고 $P(X=1)=\frac{2}{35}$

2단계 3개의 공의 색이 모두 같지는 않은 경우의 확률변수의 값과 그 확률을 구한다.

(iii) 흰 공이 2개, 검은 공이 1개인 경우

$X=8$일 때, 8이 적힌 검은 공과 2, 3, 5가 적힌 흰 공 3개 중에서 2개를 꺼내면 되므로

$P(X=8)=\frac{{}_3C_2}{35}=\frac{3}{35}$

$X=5$일 때, 5가 적힌 흰 공과 2, 3이 적힌 흰 공 2개 중에서 1개, 1, 2, 4가 적힌 검은 공 3개 중에서 1개를 꺼내면 되므로

$P(X=5)=\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{35}=\frac{6}{35}$

$X=4$일 때, 4가 적힌 검은 공과 2, 3이 적힌 흰 공 2개를 꺼내면 되므로

$P(X=4)=\frac{1}{35}$

$X=3$일 때, 3이 적힌 흰 공과 2가 적힌 흰 공과 1, 2가 적힌 검은 공 2개 중에서 1개를 꺼내면 되므로

$P(X=3)=\frac{{}_2C_1}{35}=\frac{2}{35}$

(iv) 흰 공이 1개, 검은 공이 2개인 경우

$X=8$일 때, 8이 적힌 검은 공과 1, 2, 4가 적힌 검은 공 3개 중에서 1개, 2, 3, 5가 적힌 흰 공 3개 중에서 1개를 꺼내면 되므로

$P(X=8)=\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{35}=\frac{9}{35}$

$X=5$일 때, 5가 적힌 흰 공과 1, 2, 4가 적힌 검은 공 3개 중에서 2개를 꺼내면 되므로

$P(X=5)=\frac{{}_3C_2}{35}=\frac{3}{35}$

$X=4$일 때, 4가 적힌 검은 공과 2, 3이 적힌 흰 공 2개 중에서 1개, 1, 2가 적힌 검은 공 2개 중에서 1개를 꺼내면 되므로

$P(X=4)=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{35}=\frac{4}{35}$

$X=3$일 때, 3이 적힌 흰 공과 1, 2가 적힌 검은 공 2개를 꺼내면 되므로

$P(X=3)=\frac{1}{35}$

$X=2$일 때, 2가 적힌 흰 공과 1, 2가 적힌 검은 공 2개를 꺼내면 되므로

$P(X=2)=\frac{1}{35}$

(3단계) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

이상에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{12}{35}$	1

$\therefore E(X)$

$=1\times\frac{3}{35}+2\times\frac{3}{35}+3\times\frac{3}{35}+4\times\frac{1}{7}+5\times\frac{9}{35}+8\times\frac{12}{35}$

$=\frac{179}{35}$

따라서 $p=35$, $q=179$이므로

$p+q=35+179=214$

258

표준정규분포

(1단계) 두 확률변수 X, Y를 각각 표준화하여 $F(t), G(t)$를 나타낸다.

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(m, \sigma^2)$, $N(2m, 4\sigma^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-m}{\sigma}$, $Z_Y=\frac{Y-2m}{2\sigma}$

으로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore F(t)=P(X\geq m-\sigma t)$

$=P\left(Z_X\geq\frac{(m-\sigma t)-m}{\sigma}\right)$

$=P(Z_X\geq -t)$

$G(t)=P(Y\leq 2m+\sigma t)$

$=P\left(Z_Y\leq\frac{(2m+\sigma t)-2m}{2\sigma}\right)$

$=P\left(Z_Y\leq\frac{t}{2}\right)$

(2단계) ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $F(-1)=P(Z_X\geq 1)$, $G(2)=P(Z_Y\leq 1)$이므로

$F(-1)+G(2)=1$ (참)

ㄴ. $2t_1<t_2$이면 $-t_1>-\frac{t_2}{2}$이므로

$P(Z\geq -t_1)<P\left(Z\geq-\frac{t_2}{2}\right)$

$\therefore F(t_1)=P(Z_X\geq -t_1)$

$<P\left(Z_Y\geq-\frac{t_2}{2}\right)$

$=P\left(Z_Y\leq\frac{t_2}{2}\right)$

$=G(t_2)$

$\therefore F(t_1)<G(t_2)$ (참)

ㄷ. $t>0$이므로

$F(t)=P(Z_X\geq -t)=P(Z_X\leq t)$

$=P(Z_X\leq 0)+P(0\leq Z_X\leq t)$

$=0.5+P(0\leq Z_X\leq t)$

$G(4t)=P(Z_Y\leq 2t)$

$=P(Z_Y\leq 0)+P(0\leq Z_Y\leq 2t)$

$=0.5+P(0\leq Z_Y\leq 2t)$

$\therefore 2F(t)-\{G(4t)+0.5\}$

$=2\{0.5+P(0\leq Z_X\leq t)\}-\{0.5+P(0\leq Z_Y\leq 2t)+0.5\}$

$=2P(0\leq Z_X\leq t)-P(0\leq Z_Y\leq 2t)$

$=2P(0\leq Z_X\leq t)-\{P(0\leq Z_Y\leq t)+P(t\leq Z_Y\leq 2t)\}$

$=P(0\leq Z_X\leq t)-P(t\leq Z_Y\leq 2t)$

이때 $P(0\leq Z\leq t)>P(t\leq Z\leq 2t)$이므로

$2F(t)-\{G(4t)+0.5\}>0$

$\therefore 2F(t)>G(4t)+0.5$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

259

정규분포 ⊕ 표준정규분포

(1단계) 두 확률변수의 표준편차가 같음을 이용하여 k의 조건을 구한다.

$E(X)=m_1$, $E(Y)=m_2$라 하면 조건 (가)에서 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $N(m_1, 1^2)$, $N(m_2, 1^2)$을 따른다.

(ⅰ) $m_1=m_2$일 때,

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $m_1 \neq m_2$일 때,

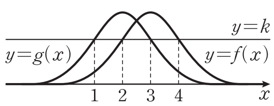
$f(x)=g(x)$를 만족시키는 x를 a라 하자.

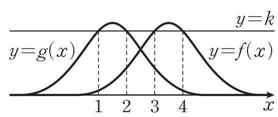
이때 $k=f(a)$이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(2단계) $m_1>m_2$일 때, 조건 (다)를 만족시키는지 확인한다.

(ⅲ) $m_1>m_2$일 때,

$k<f(a)$, $k>f(a)$인 두 가지 경우 모두 $\mathrm{P}(X \leq 2)-\mathrm{P}(Y \leq 2)$의 값은 음수이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

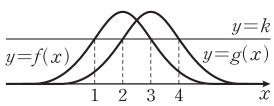




(3단계) $m_1<m_2$일 때, 조건 (다)를 만족시키는지 확인한다.

(ⅳ) $m_1<m_2$일 때,

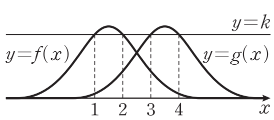
㉠ $k<f(a)$인 경우



$f(1)=f(3)=k$이므로 $m_1=2$

이때 $\mathrm{P}(X \leq 2)=0.5$이므로 $\mathrm{P}(X \leq 2)-\mathrm{P}(Y \leq 2)<0.5$가 되어 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

㉡ $k>f(a)$인 경우



$f(1)=f(2)=k$이므로 $m_1=1.5$

$g(3)=g(4)=k$이므로 $m_2=3.5$

이때 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(1.5,\ 1^2)$, $\mathrm{N}(3.5,\ 1^2)$을 따르므로

$Z_1=\dfrac{X-1.5}{1}$, $Z_2=\dfrac{Y-3.5}{1}$

로 놓으면 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X \leq 2)-\mathrm{P}(Y \leq 2)$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{P}\left(Z_1 \leq \frac{2-1.5}{1}\right)-\mathrm{P}\left(Z_2 \leq \frac{2-3.5}{1}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_1 \leq 0.5)-\mathrm{P}(Z_2 \leq -1.5)\\&=\{0.5+\mathrm{P}(0 \leq Z_1 \leq 0.5)\}-\{0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z_2 \leq 1.5)\}\\&=\mathrm{P}(0 \leq Z_1 \leq 0.5)+\mathrm{P}(0 \leq Z_2 \leq 1.5)\\&=0.1915+0.4332\\&=0.6247>0.5\end{aligned}$$

즉, 조건 (다)를 만족시킨다.

(4단계) $\mathrm{P}(X \geq 2.5)$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X \geq 2.5)&=\mathrm{P}\left(Z_1 \geq \frac{2.5-1.5}{1}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_1 \geq 1)\\&=\mathrm{P}(Z_1 \geq 0)-\mathrm{P}(0 \leq Z_1 \leq 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

06 통계적 추정

유형 분석 기출

76쪽~83쪽

260 401 **261** ④ **262** ② **263** $2\sqrt{14}$ **264** ③
265 ① **266** ② **267** 0.1587 **268** 0.0456 **269** ③
270 ③ **271** ② **272** ① **273** $74.02 \leq m \leq 75.98$
274 ② **275** 0.25 **276** ③ **277** $94.2 \leq m \leq 145.8$
278 ④ **279** 2.8 **280** ④ **281** 36 **282** ④
283 $\frac{4}{3}$ **284** ⑤ **285** 240 **286** ④ **287** 75
288 0.7745 **289** ③ **290** $0.5608 \leq p \leq 0.6392$
291 $0.01 \leq p \leq 0.19$ **292** ③ **293** 0.1176 **294** 196
295 385

260

모평균이 20, 모분산이 16, 표본의 크기가 16이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=20$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{16}{16}=1$

따라서 $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\overline{X}^2)&=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2\\&=1+20^2=401\end{aligned}$$

261

모표준편차가 2, 표본의 크기가 n이므로

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{2}{\sqrt{n}}$

이때 $\sigma(\overline{X})$가 $\dfrac{1}{5}$ 이하이므로

$\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{5}$, $\sqrt{n} \geq 10$

$\therefore n \geq 100$

따라서 n의 최솟값은 100이다.

262

모평균을 m, 모분산을 σ^2이라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X_1})=\mathrm{E}(\overline{X_2})=m$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X_1})-\mathrm{E}(\overline{X_2})=2n-30$에서

$2n-30=0$

$\therefore n=15$

$\therefore \dfrac{\mathrm{V}(\overline{X_1})}{\mathrm{V}(\overline{X_2})}=\dfrac{\frac{\sigma^2}{15}}{\frac{\sigma^2}{25}}=\dfrac{5}{3}$

263

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{2}{15}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{4}{15}+5\times\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{15}+2^2\times\frac{2}{15}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{4}{15}+5^2\times\frac{1}{3}-\left(\frac{11}{3}\right)^2$

$=15-\frac{121}{9}=\frac{14}{9}$

이때 표본의 크기가 25이므로

$V(\overline{X})=\frac{\frac{14}{9}}{25}=\frac{14}{225}$

$\therefore\ \sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}$

$=\sqrt{\frac{14}{225}}=\frac{\sqrt{14}}{15}$

$\therefore\ \sigma(30\overline{X})=30\sigma(\overline{X})$

$=30\times\frac{\sqrt{14}}{15}$

$=2\sqrt{14}$

개념 보충

이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차

이산확률변수 X와 두 상수 $a\ (a\neq0)$, b에 대하여

① $E(aX+b)=aE(X)+b$

② $V(aX+b)=a^2V(X)$

③ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

264

확률변수 X에 대하여

$E(X)=(-2)\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{6}=1$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=(-2)^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{6}-1^2$

$=\frac{14}{3}-1=\frac{11}{3}$

표본의 크기가 n일 때 $V(\overline{X})=\frac{1}{6}$이므로

$\frac{\frac{11}{3}}{n}=\frac{1}{6},\ \frac{11}{3n}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ n=22$

265

주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=0\times\frac{3}{20}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{3}{20}=2$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=0^2\times\frac{3}{20}+1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{3}{20}-2^2$

$=\frac{28}{5}-4=\frac{8}{5}$

이때 표본의 크기가 10이므로

$E(\overline{X})=2$

$V(\overline{X})=\frac{\frac{8}{5}}{10}=\frac{4}{25}$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}$

$\therefore\ E(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=2+\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$

참고 표본을 뽑을 때, 특별한 언급이 없으면 임의추출은 복원추출로 생각한다.

266

화살을 한 번 쏘아서 맞힌 영역에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

확률변수 X에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$=\frac{10}{3}-\frac{25}{9}=\frac{5}{9}$

표본의 크기가 n일 때 $V(\overline{X})=\frac{1}{9}$이어야 하므로

$\frac{\frac{5}{9}}{n}=\frac{1}{9},\ \frac{5}{9n}=\frac{1}{9}$

$\therefore\ n=5$

267

모집단이 정규분포 $N(32, 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(32, \frac{12^2}{16}\right)$, 즉 $N(32, 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-32}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(\overline{X}\le29)=P\left(Z\le\frac{29-32}{3}\right)$

$=P(Z\le-1)$

$=P(Z\ge1)$

$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1)$

$=0.5-0.3413$

$=0.1587$

1등급 비법

표준정규분포에서의 확률

표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르는 확률변수 Z에 대한 확률은 다음을 이용하여 구한다. (단, $0<a<b$)

① $P(Z\geq 0)=P(Z\leq 0)=0.5$
② $P(-a\leq Z\leq 0)=P(0\leq Z\leq a)$
③ $P(-a\leq Z\leq a)=2P(0\leq Z\leq a)$
④ $P(Z\geq a)=0.5-P(0\leq Z\leq a)$
⑤ $P(a\leq Z\leq b)=P(0\leq Z\leq b)-P(0\leq Z\leq a)$
⑥ $P(-a\leq Z\leq b)=P(0\leq Z\leq a)+P(0\leq Z\leq b)$

268

모집단이 정규분포 $N(m, 40^2)$을 따르고 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{40^2}{64}\right)$, 즉 $N(m, 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(|\overline{X}-m|\geq 10)&=P\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{5}\right|\geq\frac{10}{5}\right)\\&=P(|Z|\geq 2)\\&=P(Z\leq -2)+P(Z\geq 2)\\&=2P(Z\geq 2)\\&=2\{P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2)\}\\&=2\times(0.5-0.4772)\\&=0.0456\end{aligned}$$

269

정규분포 $N(m, 6^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $N(m, 2^2)$을 따르므로 $Z_1=\dfrac{\overline{X}-m}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

또, 정규분포 $N(6, 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(6, \frac{2^2}{4}\right)$, 즉 $N(6, 1^2)$을 따르므로 $Z_2=\dfrac{\overline{Y}-6}{1}$으로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(\overline{X}\leq 12)+P(\overline{Y}\geq 8)=1$에서

$P\left(Z_1\leq\frac{12-m}{2}\right)+P\left(Z_2\geq\frac{8-6}{1}\right)=1$

$P\left(Z_1\leq\frac{12-m}{2}\right)+P(Z_2\geq 2)=1$

$$\begin{aligned}P\left(Z_1\leq\frac{12-m}{2}\right)&=1-P(Z_2\geq 2)\\&=P(Z_2\leq 2)\end{aligned}$$

이때 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$\dfrac{12-m}{2}=2$ $\quad\therefore m=8$

270

모집단이 정규분포 $N(m, 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{12}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르고 모평균과 표본평균의 차가 2 이하일 확률이 0.6826 이상이므로

$P(|\overline{X}-m|\leq 2)\geq 0.6826$

$P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right|\leq\dfrac{2}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)\geq 0.6826$

$P\left(|Z|\leq\frac{\sqrt{n}}{6}\right)\geq 0.6826$

$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{6}\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}}{6}\right)\geq 0.6826$

$2P\left(0\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}}{6}\right)\geq 0.6826$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}}{6}\right)\geq 0.3413$

이때 $P(0\leq Z\leq 1)=0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{6}\geq 1$, $\sqrt{n}\geq 6$

$\therefore n\geq 36$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 36이다.

271

모집단이 정규분포 $N(80, 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80, \frac{20^2}{25}\right)$, 즉 $N(80, 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-80}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\leq k)=0.0668$에서

$P\left(Z\leq\frac{k-80}{4}\right)=0.0668$

$P\left(Z\geq-\frac{k-80}{4}\right)=0.0668$

$0.5-P\left(0\leq Z\leq-\frac{k-80}{4}\right)=0.0668$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq-\frac{k-80}{4}\right)=0.4332$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$이므로

$-\frac{k-80}{4}=1.5$, $k-80=-6$

$\therefore k=74$

272

공장에서 생산하는 양초 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(25, 3^2)$을 따른다.

이때 임의추출한 양초 4개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(25, \frac{3^2}{4}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(25, \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\dfrac{\overline{X}-25}{\frac{3}{2}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 양초 4개를 포장한 한 상자의 무게가 109 g 이상 115 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(109\le 4\overline{X}\le 115)&=\mathrm{P}\left(\frac{109}{4}\le \overline{X}\le \frac{115}{4}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{\frac{109}{4}-25}{\frac{3}{2}}\le Z\le \frac{\frac{115}{4}-25}{\frac{3}{2}}\right)\\&=\mathrm{P}(1.5\le Z\le 2.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.4938-0.4332\\&=0.0606\end{aligned}$$

273

표본의 크기 64가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 4를 사용할 수 있다.

표본평균이 75이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$75-1.96\times\frac{4}{\sqrt{64}}\le m\le 75+1.96\times\frac{4}{\sqrt{64}}$$

$\therefore$ $74.02\le m\le 75.98$

274

표본평균이 11, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$11-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le 11+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $8.85\le m\le 13.15$와 일치하므로

$$11-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=8.85,$$

$$11+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=13.15$$

따라서 $2.58\times\dfrac{5}{\sqrt{n}}=2.15$이므로

$\sqrt{n}=6$ $\quad\therefore$ $n=36$

275

표본의 크기 49가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 k를 사용할 수 있다.

표본평균이 15.5이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$15.5-1.96\times\frac{k}{\sqrt{49}}\le m\le 15.5+1.96\times\frac{k}{\sqrt{49}}$$

$\therefore$ $15.5-0.28k\le m\le 15.5+0.28k$

이 신뢰구간이 $15.43\le m\le 15.57$과 일치하므로

$15.5-0.28k=15.43,$

$15.5+0.28k=15.57$

따라서 $0.28k=0.07$이므로

$k=0.25$

276

표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 16, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{16}{\sqrt{64}}\le m\le \overline{x}+1.96\times\frac{16}{\sqrt{64}}$$

$\therefore$ $\overline{x}-3.92\le m\le \overline{x}+3.92$

이 신뢰구간이 $240.12\le m\le a$와 일치하므로

$\overline{x}-3.92=240.12$, $\overline{x}+3.92=a$

$\overline{x}=240.12+3.92=244.04$

$a=244.04+3.92=247.96$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{x}+a&=244.04+247.96\\&=492\end{aligned}$$

277

표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=100.4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=139.6 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$2\overline{x}=240$ $\quad\therefore$ $\overline{x}=120$

$\overline{x}=120$을 ㉡에 대입하면

$1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=19.6$ $\quad\therefore$ $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=10$

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$120-2.58\times 10\le m\le 120+2.58\times 10$

$\therefore$ $94.2\le m\le 145.8$

278

표본평균이 160, 모표준편차가 12, 표본의 크기가 36이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$160-k\times\frac{12}{\sqrt{36}}\le m\le 160+k\times\frac{12}{\sqrt{36}}$$

$\therefore$ $160-2k\le m\le 160+2k$

이 신뢰구간이 $156.24\le m\le 163.76$과 일치하므로

$160-2k=156.24$, $160+2k=163.76$

$\therefore$ $k=1.88$

이때 주어진 표준정규분포표에서

$$\mathrm{P}(|Z|\le 1.88)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.88)$$
$$=2\times 0.47$$
$$=0.94$$

이므로 $\frac{\alpha}{100}=0.94$

$\therefore\ \alpha=94$

279

모표준편차가 5, 표본의 크기가 49이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times 1.96\times \frac{5}{\sqrt{49}}=2.8$$

280

ㄱ. 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 포함한다. (참)

ㄴ. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\text{단, }\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 작을수록 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다. (거짓)

ㄷ. ㉠에서 신뢰도를 낮추면 k의 값이 작아지고 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

281

$b-a$의 값은 신뢰도 α %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이이므로

$$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\text{단, }\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

$n=196$이면 $b-a=4$이므로

$$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{196}}=4,\ \frac{k\sigma}{7}=4$$

$\therefore\ k\sigma=28$

따라서 $b-a=\frac{28}{3}$이면

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{28}{3},\ \frac{2\times 28}{\sqrt{n}}=\frac{28}{3}$$

$\sqrt{n}=6 \qquad \therefore\ n=36$

282

모표준편차가 10, 표본의 크기가 64이므로

$$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}\ (k\text{는 상수})$$

라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2k\times\frac{10}{\sqrt{64}}=4 \qquad \therefore\ k=1.6$$

따라서 $\mathrm{P}(-1.6\le Z\le 1.6)=\frac{\alpha}{100}$이므로

$$\alpha=100\,\mathrm{P}(-1.6\le Z\le 1.6)$$
$$=200\,\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)$$
$$=200\times 0.45=90$$

283

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모표준편차가 4, 표본의 크기가 25일 때 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$a=2k\times\frac{4}{\sqrt{25}}=\frac{8}{5}k$$

모표준편차가 4, 표본의 크기가 64일 때 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$b=2k\times\frac{4}{\sqrt{64}}=k$$

이때 $a+b=2.6$에서

$$\frac{8}{5}k+k=2.6,\ \frac{13}{5}k=2.6$$

$\therefore\ k=1$

따라서 구하는 신뢰구간의 길이는

$$2\times 1\times\frac{4}{\sqrt{36}}=\frac{4}{3}$$

284

표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\text{단, }\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$$

이므로

$$\frac{l}{3}=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \frac{l}{3}=2k\frac{\sigma}{\sqrt{9n}}$$

따라서 신뢰구간의 길이가 $\frac{l}{3}$이 되려면 표본의 크기는 $9n$이 되어야 한다.

285

표본의 크기를 n이라 하면 모표준편차가 9이므로 신뢰도 99 %로 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2\times 2.58\times\frac{9}{\sqrt{n}}$$

신뢰구간의 길이가 3 이하가 되려면

$2\times2.58\times\frac{9}{\sqrt{n}}\le3$

$\sqrt{n}\ge15.48$ $\therefore n\ge239.6304$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 240이다.

286

모비율이 p, 표본의 크기가 36이므로

$E(\hat{p})=p$, $V(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{36}$

이때 $E(\hat{p})+12V(\hat{p})=\frac{13}{16}$에서

$p+12\times\frac{p(1-p)}{36}=\frac{13}{16}$

$16p^2-64p+39=0$, $(4p-3)(4p-13)=0$

$\therefore p=\frac{3}{4}$ ($\because 0<p<1$)

287

모비율이 0.75, 표본의 크기가 n이므로

$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}=\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n}}$

이때 $\sigma(\hat{p})\le0.05$에서

$\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{n}}\le\frac{1}{20}$, $\sqrt{n}\ge5\sqrt{3}$

$\therefore n\ge75$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 75이다.

288

임의추출한 64명 중에서 찬성한 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 64는 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.8, \frac{0.8\times0.2}{64}\right)$, 즉 $N(0.8, 0.05^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.8}{0.05}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{48}{64}\le\hat{p}\le\frac{56}{64}\right)&=P(0.75\le\hat{p}\le0.875)\\
&=P\left(\frac{0.75-0.8}{0.05}\le Z\le\frac{0.875-0.8}{0.05}\right)\\
&=P(-1\le Z\le1.5)\\
&=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le1.5)\\
&=0.3413+0.4332\\
&=0.7745
\end{aligned}
$$

289

임의추출한 400개의 콩 중에서 녹색 콩의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 400은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.1, \frac{0.1\times0.9}{400}\right)$, 즉 $N(0.1, 0.015^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.1}{0.015}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$
\begin{aligned}
P\left(\hat{p}\le\frac{49}{400}\right)&=P(\hat{p}\le0.1225)\\
&=P\left(Z\le\frac{0.1225-0.1}{0.015}\right)\\
&=P(Z\le1.5)\\
&=P(Z\ge0)+P(0\le Z\le1.5)\\
&=0.5+0.4332\\
&=0.9332
\end{aligned}
$$

290

표본비율이 $\frac{360}{600}=0.6$, 표본의 크기가 600이므로 공업단지 조성에 찬성하는 주민의 비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.6-1.96\times\sqrt{\frac{0.6\times0.4}{600}}\le p\le0.6+1.96\times\sqrt{\frac{0.6\times0.4}{600}}$

$\therefore 0.5608\le p\le0.6392$

291

표본비율이 $\frac{10}{100}=0.1$, 표본의 크기가 100이므로 정기적으로 봉사 활동을 하는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.1-3\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}\le p\le0.1+3\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}$

$\therefore 0.01\le p\le0.19$

292

표본비율이 $\frac{16}{100}=0.16$, 표본의 크기가 n이므로 불량률 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.16-2\times\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{n}}\le p\le0.16+2\times\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{n}}$

이것이 $0.128\le p\le0.192$와 같으므로

$0.16-2\times\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{n}}=0.128$

$0.16+2\times\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{n}}=0.192$

$2\times\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{n}}=0.032$

$\therefore n=525$

293

표본의 크기가 100, 표본비율이 0.1이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}=0.1176$

294

표본의 크기가 n, 표본비율이 0.5이고 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이가 0.14이므로

$2\times1.96\times\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{n}}=0.14$

$\sqrt{n}=14$ $\therefore n=196$

295

표본의 크기가 n, 표본비율이 0.2이므로 모비율을 p라 하면 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.2-1.96\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}\le p\le0.2+1.96\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}$

$-1.96\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}\le p-0.2\le1.96\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}$

$\therefore\ |p-0.2|\le1.96\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}$

이때 모비율과 표본비율의 차가 0.04 이하가 되어야 하므로

$1.96\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}\le0.04$

$\sqrt{n}\ge19.6\qquad\therefore\ n\ge384.16$

따라서 n의 최솟값은 385이다.

내신 적중 서술형

84쪽

296 (1) $a=\frac{1}{20}$, $b=\frac{1}{8}$ (2) $\frac{19}{64}$ **297** 0.8185

298 9 **299** 0.8413

296

(1) 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$

$(a+b)+(2a+b)+(3a+b)+(4a+b)=1$

$\therefore\ 10a+4b=1$ …… ㉠

$E(X)=E(\overline{X})=\frac{11}{4}$이므로

$(a+b)+2(2a+b)+3(3a+b)+4(4a+b)=\frac{11}{4}$

$\therefore\ 30a+10b=\frac{11}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{20},\ b=\frac{1}{8}$ …… ㉮

(2) $E(X^2)$

$=(a+b)+2^2\times(2a+b)+3^2\times(3a+b)+4^2\times(4a+b)$

$=100a+30b$

$=100\times\frac{1}{20}+30\times\frac{1}{8}$

$=\frac{35}{4}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{35}{4}-\left(\frac{11}{4}\right)^2$

$=\frac{19}{16}$ …… ㉯

$\therefore\ V(\overline{X})=\frac{\frac{19}{16}}{4}=\frac{19}{64}$ …… ㉰

	채점 기준	배점 비율
(1)	㉮ 상수 a, b의 값 구하기	50 %
(2)	㉯ $V(X)$ 구하기	30 %
	㉰ $V(\overline{X})$ 구하기	20 %

297

모집단이 정규분포 $N(40,\ 0.1)$을 따르고 표본의 크기가 10이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(40,\ \frac{0.1}{10}\right)$, 즉 $N(40,\ 0.1^2)$을 따른다. …… ㉮

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-40}{0.1}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

한 상자의 무게는 $10\overline{X}$이므로 재포장을 하지 않을 확률은

$P(399\le10\overline{X}\le402)$

$=P(39.9\le\overline{X}\le40.2)$

$=P\left(\frac{39.9-40}{0.1}\le Z\le\frac{40.2-40}{0.1}\right)$

$=P(-1\le Z\le2)$

$=P(-1\le Z\le0)+P(0\le Z\le2)$

$=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포 구하기	30 %
㉯ 재포장을 하지 않을 확률 구하기	70 %

298

표본의 크기가 m일 때, 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{3.92}{\sqrt{m}}$ …… ㉮

표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{3.92}{\sqrt{n}}$ …… ㉯

두 신뢰구간의 길이의 비가 1 : 3이므로

$\frac{3.92}{\sqrt{m}}:\frac{3.92}{\sqrt{n}}=1:3$

$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}=3$

$\therefore\ \frac{m}{n}=9$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 표본의 크기가 m일 때, 신뢰구간의 길이 구하기	30 %
㉯ 표본의 크기가 n일 때, 신뢰구간의 길이 구하기	30 %
㉰ $\frac{m}{n}$의 값 구하기	40 %

299

모비율이 $\frac{40}{200}=0.2$이고 임의추출한 64개의 공 중에서 검은 공의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 64는 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.2, \frac{0.2\times0.8}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.2, 0.05^2)$을 따른다. …… ㉮

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.05}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\hat{p}\le0.25)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{0.25-0.2}{0.05}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le1)\\&=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 표본비율 $\hat{p}$이 따르는 정규분포 구하기	30 %
㉯ 검은 공의 비율이 25 % 이하로 나올 확률 구하기	70 %

1등급 실력 완성

85쪽~86쪽

300 $\frac{75}{2}$ **301** 4 **302** 0.02 **303** ⑤
304 0.1574 **305** ㄱ, ㄷ **306** 58 **307** 0.8413

300

표본평균의 평균, 분산, 표준편차

전략 $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=5$이므로

$$2\times a+4\times\left(\frac{1}{3}-a\right)+6\times\frac{1}{2}+8\times\frac{1}{6}=5$$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times0+6^2\times\frac{1}{2}+8^2\times\frac{1}{6}-5^2\\&=30-25=5\end{aligned}$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{2}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\overline{X}^2)&=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2\\&=\frac{5}{2}+5^2=\frac{55}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(2\overline{X}+1)&=2^2\mathrm{V}(\overline{X})\\&=4\times\frac{5}{2}=10\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X}^2)+\mathrm{V}(2\overline{X}+1)=\frac{55}{2}+10=\frac{75}{2}$

301

표본평균의 분포

전략 생수 1병의 용량을 확률변수 X라 하고, X와 표본의 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$를 각각 표준화하여 p_1, p_2를 구한다.

풀이 생수 1병의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(500, 20^2)$을 따른다.

이때 $Z_X=\frac{X-500}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}p_1&=\mathrm{P}(X\ge520)\\&=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{520-500}{20}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge1)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

또, 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(500, \frac{20^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(500, \left(\frac{20}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-500}{\frac{20}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}p_2&=\mathrm{P}(\overline{X}\ge480)\\&=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{480-500}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge-\sqrt{n})\end{aligned}$$

그런데 $p_2-p_1=0.8185$이므로

$$\begin{aligned}p_2&=p_1+0.8185\\&=0.1587+0.8185\\&=0.9772\end{aligned}$$

즉, $\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge-\sqrt{n})=0.9772$이므로

$\mathrm{P}(-\sqrt{n}\le Z_{\overline{X}}\le0)+0.5=0.9772$

$\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le\sqrt{n})+0.5=0.9772$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le\sqrt{n})=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\sqrt{n}=2$

$\therefore n=4$

302

표본평균의 분포 ⊕ 이항분포와 정규분포의 관계

전략 쿠키 상자에 들어 있는 쿠키 9개의 무게의 평균이 따르는 정규분포를 구한다.

풀이 한 상자에 들어 있는 쿠키 9개의 평균 무게를 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60, \frac{3^2}{9}\right)$, 즉 $N(60, 1^2)$을 따른다.
이때 $Z_{\overline{X}}=\overline{X}-60$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 이 공장에서 생산한 쿠키 9개를 담은 상자 하나가 불량품일 확률은

$$\begin{aligned}P(9\overline{X}\le 528.48)&=P(\overline{X}\le 58.72)\\&=P(Z_{\overline{X}}\le 58.72-60)\\&=P(Z_{\overline{X}}\le -1.28)\\&=P(Z_{\overline{X}}\ge 1.28)\\&=P(Z_{\overline{X}}\ge 0)-P(0\le Z_{\overline{X}}\le 1.28)\\&=0.5-0.4\\&=0.1\end{aligned}$$

한편, 쿠키 상자 900개 중에서 불량품인 상자의 수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $B(900, 0.1)$을 따르므로
$E(Y)=900\times 0.1=90$
$V(Y)=900\times 0.1\times 0.9=81$
즉, Y는 근사적으로 정규분포 $N(90, 9^2)$을 따르므로
$Z_Y=\frac{Y-90}{9}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(Y\le 72)&=P\left(Z_Y\le \frac{72-90}{9}\right)\\&=P(Z_Y\le -2)\\&=P(Z_Y\ge 2)\\&=P(Z_Y\ge 0)-P(0\le Z_Y\le 2)\\&=0.5-0.48\\&=0.02\end{aligned}$$

303

표본평균의 분포

전략 두 표본평균의 확률분포를 이용하여 확률을 구한다.

풀이 확률변수 X의 표준편차를 σ라 하면 X는 정규분포 $N(220, \sigma^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(220, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.
이때 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\le 215)&=P\left(Z_{\overline{X}}\le \frac{215-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\\&=P\left(Z_{\overline{X}}\le -\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)\\&=P\left(Z_{\overline{X}}\ge \frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right)\\&=0.1587\end{aligned}$$

한편, 주어진 표준정규분포표에서

$$\begin{aligned}P(Z\ge 1)&=0.5-P(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

이므로 $\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}=1$

$\therefore \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5$ …… ㉠

또, 확률변수 Y의 표준편차는 $1.5\sigma=\frac{3}{2}\sigma$이고, Y는 정규분포 $N\left(240, \left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2\right)$을 따르므로 크기가 $9n$인 표본의 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(240, \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.
이때 $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-240}{\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{Y}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(\overline{Y}\ge 235)&=P\left(Z_{\overline{Y}}\ge \frac{235-240}{\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}}\right)\\&=P\left(Z_{\overline{Y}}\ge \frac{-5}{\frac{5}{2}}\right)\ (\because ㉠)\\&=P(Z_{\overline{Y}}\ge -2)\\&=P(Z_{\overline{Y}}\le 2)\\&=P(Z_{\overline{Y}}\le 0)+P(0\le Z_{\overline{Y}}\le 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

304

표본평균의 분포

전략 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(2a-x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

풀이 확률밀도함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(64-x)$를 만족시키므로 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=32$에 대하여 대칭이다.
$\therefore m=32$
모평균이 32, 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(32, \frac{12^2}{36}\right)$, 즉 $N(32, 2^2)$을 따른다.
이때 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-32}{2}$로 놓으면 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(26\le \overline{X}\le 30)&=P\left(\frac{26-32}{2}\le Z_{\overline{X}}\le \frac{30-32}{2}\right)\\&=P(-3\le Z_{\overline{X}}\le -1)\end{aligned}$$

한편, $Z_X=\frac{X-32}{12}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 주어진 확률밀도함수의 그래프에서
$P(-1\le Z_X\le 1)=0.6826$,
$P(-3\le Z_X\le 3)=0.9974$

$\therefore \mathrm{P}(0 \le Z_X \le 1)=\frac{1}{2}\times 0.6826=0.3413$,

$\mathrm{P}(0 \le Z_X \le 3)=\frac{1}{2}\times 0.9974=0.4987$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(-3 \le Z_{\overline{X}} \le -1)&=\mathrm{P}(-3 \le Z_X \le -1)\\&=\mathrm{P}(1 \le Z_X \le 3)\\&=\mathrm{P}(0 \le Z_X \le 3)-\mathrm{P}(0 \le Z_X \le 1)\\&=0.4987-0.3413\\&=0.1574\end{aligned}$$

305

모평균의 추정 ⊕ 모평균의 신뢰구간의 길이

전략 표준편차를 이용하여 분포의 고르기를 파악한 후, 모평균의 추정을 이용하여 두 지역 A, B의 표본의 크기를 구한다.

풀이 ㄱ. A 지역의 표준편차는 4, B 지역의 표준편차는 9이므로 표준편차가 작은 A 지역의 분포가 더 고르다. (참)

ㄴ. 두 지역 A, B의 신뢰도가 α %로 같으므로

$\mathrm{P}(|Z| \le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 A 지역의 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$36-k\frac{4}{\sqrt{n_1}} \le m \le 36+k\frac{4}{\sqrt{n_1}}$ …… ㉠

이 신뢰구간이 $35 \le m \le 37$과 일치하므로

$36-k\frac{4}{\sqrt{n_1}}=35$, $k\frac{4}{\sqrt{n_1}}=1$

$\sqrt{n_1}=4k$

$\therefore n_1=16k^2$

또, B 지역의 모평균에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$42-k\frac{9}{\sqrt{n_2}} \le m \le 42+k\frac{9}{\sqrt{n_2}}$ …… ㉡

이 신뢰구간이 $39 \le m \le 45$와 일치하므로

$42-k\frac{9}{\sqrt{n_2}}=39$, $k\frac{9}{\sqrt{n_2}}=3$

$\sqrt{n_2}=3k$

$\therefore n_2=9k^2$

$\therefore n_1 > n_2$ (거짓)

ㄷ. 신뢰도를 α %보다 크게 하면 ㉠, ㉡에서 k의 값이 더 커진다.

따라서 신뢰구간의 길이 $2k\frac{4}{\sqrt{n_1}}$, $2k\frac{9}{\sqrt{n_2}}$도 각각 더 길어진다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

306

모평균의 신뢰구간의 길이

전략 두 신뢰도에 대한 신뢰구간의 길이를 식으로 나타내어 비교한다.

풀이 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.64)=0.45$에서 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.64)=0.90$이고 표본의 크기가 100, 모표준편차가 2이므로 신뢰도 90 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$l=2\times 1.64\times\frac{2}{\sqrt{100}}=0.656$ …… ㉠

이때 $\mathrm{P}(|Z| \le \alpha)=\frac{k}{100}$로 놓으면

$\frac{l}{2}=2\times\alpha\times\frac{2}{\sqrt{100}}=\frac{2}{5}\alpha$

$\therefore l=\frac{4}{5}\alpha$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha=0.82$

따라서 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.82)=0.29$이므로

$\mathrm{P}(|Z| \le 0.82)=0.58$

$\therefore k=58$

307

표본비율의 분포

전략 두 표본비율의 확률분포를 이용하여 확률을 구한다.

풀이 표본의 크기 81은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}_1$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.9, \frac{0.9\times 0.1}{81}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(0.9, \left(\frac{1}{30}\right)^2\right)$을 따르고, 표본의 크기 n은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}_2$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.5, \frac{0.5\times 0.5}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(0.5, \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\hat{p}_1 \le 0.95)=\mathrm{P}(\hat{p}_2 \ge 0.425)$이고 $0.425 < 0.5$이므로

$\frac{0.95-0.9}{\frac{1}{30}}=-\frac{0.425-0.5}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}$

$\sqrt{n}=10$

$\therefore n=100$

따라서 $\hat{p}_2$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.5, 0.05^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-0.5}{0.05}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(\hat{p}_2 \le 0.55)&=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{0.55-0.5}{0.05}\right)\\&=\mathrm{P}(Z \le 1)\\&=\mathrm{P}(Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\\&=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$

도전 1등급 최고난도

87쪽

308 ⑤ **309** ③ **310** 784

308

표본평균의 평균, 분산, 표준편차

1단계 주어진 상황을 확률변수로 나타낸다.

주어진 시행을 한 번 하여 기록한 수를 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, $\overline{X}$는 임의추출한 크기가 2인 표본평균이다.

(2단계) 확률변수 X의 확률분포를 구한다.

(i) $X=1$인 경우

㉠ 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수인 경우
주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1일 확률은

$$\frac{2}{6}\times\frac{2}{{}_3C_2}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

㉡ 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수가 아닌 경우
주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1일 확률은

$$\frac{4}{6}\times\frac{3}{{}_4C_2}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

㉠, ㉡에서

$$P(X=1)=\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$$

(ii) $X=2$인 경우

㉠ 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수인 경우
주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 2일 확률은

$$\frac{2}{6}\times\frac{1}{{}_3C_2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

㉡ 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수가 아닌 경우
주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 2일 확률은

$$\frac{4}{6}\times\frac{2}{{}_4C_2}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

㉠, ㉡에서

$$P(X=2)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$$

(iii) $X=3$인 경우

㉠ 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수인 경우
주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 3인 경우는 존재하지 않는다.

㉡ 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수가 아닌 경우
주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 3일 확률은

$$\frac{4}{6}\times\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$$

㉠, ㉡에서

$$P(X=3)=\frac{1}{9}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	1

(3단계) $P(\overline{X}=2)$의 값을 구한다.

주어진 시행을 2번 반복하여 기록한 두 개의 수를 각각 a, b라 할 때, $\overline{X}=2$, 즉 $\frac{a+b}{2}=2$가 되는 경우는

$a=1$, $b=3$ 또는 $a=2$, $b=2$ 또는 $a=3$, $b=1$

$$\begin{aligned}\therefore P(\overline{X}=2)&=P(X=1)\times P(X=3)\\&\quad+P(X=2)\times P(X=2)+P(X=3)\times P(X=1)\\&=\frac{5}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\times\frac{5}{9}\\&=\frac{5}{81}+\frac{1}{9}+\frac{5}{81}\\&=\frac{19}{81}\end{aligned}$$

309

표본평균의 분포

(1단계) 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구한다.

모집단이 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{4}\right)$, 즉 $N\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

(2단계) ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

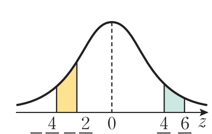
ㄱ. $$\begin{aligned}f(m-1)&=P(m-2\le\overline{X}\le m+2)\\&=P\left(\frac{m-2-m}{\frac{\sigma}{2}}\le Z\le\frac{m+2-m}{\frac{\sigma}{2}}\right)\\&=P\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z\le\frac{4}{\sigma}\right)\\&=P\left(|Z|\le\frac{4}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(|X-m|\le4)&=P\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|\le\frac{4}{\sigma}\right)\\&=P\left(|Z|\le\frac{4}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$\therefore f(m-1)=P(|X-m|\le4)$ (참)

ㄴ. $$\begin{aligned}f(m)&=P(m-1\le\overline{X}\le m+3)\\&=P\left(\frac{m-1-m}{\frac{\sigma}{2}}\le Z\le\frac{m+3-m}{\frac{\sigma}{2}}\right)\\&=P\left(-\frac{2}{\sigma}\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

이때



$$\begin{aligned}&P\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z\le-\frac{2}{\sigma}\right)\\&=P\left(\frac{2}{\sigma}\le Z\le\frac{4}{\sigma}\right)\\&>P\left(\frac{4}{\sigma}\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f(m)&=P\left(-\frac{2}{\sigma}\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)\\&<P\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z\le\frac{4}{\sigma}\right)\\&=f(m-1)\end{aligned}$$

따라서 $t=m$일 때, 함수 $f(t)$는 최댓값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(m+k-1)$

$=\mathrm{P}(m+k-2\le \overline{X}\le m+k+2)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{m+k-2-m}{\frac{\sigma}{2}}\le Z\le \dfrac{m+k+2-m}{\frac{\sigma}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(2\times\dfrac{k-2}{\sigma}\le Z\le 2\times\dfrac{k+2}{\sigma}\right)$

$f(m-k-1)$

$=\mathrm{P}(m-k-2\le \overline{X}\le m-k+2)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{m-k-2-m}{\frac{\sigma}{2}}\le Z\le \dfrac{m-k+2-m}{\frac{\sigma}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-2\times\dfrac{k+2}{\sigma}\le Z\le -2\times\dfrac{k-2}{\sigma}\right)$

일반적으로 $a<b$인 두 실수 a, b에 대하여

$\mathrm{P}(a\le Z\le b)=\mathrm{P}(-b\le Z\le -a)$가 성립하므로

$f(m+k-1)=f(m-k-1)$ (참)

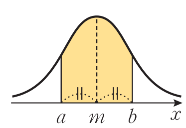
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

개념 보충

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\mathrm{P}(a\le X\le b)$가 최대이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$\dfrac{a+b}{2}=m$ (단, $b-a$는 일정)



310

모비율의 신뢰구간의 길이

(1단계) 신뢰구간의 길이를 p, n에 대한 식으로 나타낸다.

모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이를 l이라 하면

$l=2\times 1.96\times\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

(2단계) p의 조건을 이용하여 신뢰구간의 범위를 구한다.

$0.8\le p\le 1$이므로

$p(1-p)=-p^2+p$

$=-\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

$\le -\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{4}{25}$

$\therefore\ l=2\times 1.96\times\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

$\le 2\times 1.96\times\dfrac{2}{5\sqrt{n}}$

$=\dfrac{1.568}{\sqrt{n}}$

(3단계) n의 최솟값을 구한다.

$l\le 0.056$에서

$\dfrac{1.568}{\sqrt{n}}\le 0.056$

$\sqrt{n}\ge 28 \qquad \therefore\ n\ge 784$

따라서 구하는 n의 최솟값은 784이다.

MEMO

MEMO

MEMO