바른답·
알찬풀이

확률과 통계 345제

해(001~027)일등확통-01~03강ok.indd 1 14. 10. 10. 오후 3:33

바른답 • 알찬풀이

I 순열과 조합

01 순열

교과서에서 뽑은 기본 문제 pp. 8~9

001 7	**002** 30	**003** (1) 8	(2) 3	(3) 5
004 210	**005** 12	**006** 125	**007** 420	

001 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수를 각각 a, b라 하면 순서쌍 (a, b)는

(i) $a+b=2$인 경우, $(1, 1)$의 1가지

(ii) $a+b=7$인 경우, $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$의 6가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$1+6=7$

002 $3\cdot5\cdot2=30$

003 (1) ${}_nP_2=n(n-1)$이므로

$n(n-1)=56=8\cdot7$

$\therefore n=8$

(2) $120=6\cdot5\cdot4$이므로

$120={}_6P_3 \qquad \therefore r=3$

(3) ${}_8P_r=\dfrac{8!}{(8-r)!}=\dfrac{8!}{3!}$이므로

$8-r=3 \qquad \therefore r=5$

004 15명 중에서 2명을 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

${}_{15}P_2=15\cdot14=210$

005 3명의 남자가 원형의 탁자에 둘러앉는 방법의 수는

$(3-1)!=2!=2$

남자들 사이사이의 3개의 자리에 여자 3명을 앉히는 방법의 수는

${}_3P_3=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$2\cdot6=12$

006 각 자리에는 1, 2, 3, 4, 5가 모두 올 수 있으므로 구하는 세 자리 자연수의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

007 7개의 숫자 중 1이 3개, 2가 2개 있으므로 구하는 7자리 자연수의 개수는

$\dfrac{7!}{3!2!}=420$

내신 분석 기출문제 pp. 10~20

008 ⑤	**009** 33	**010** ④	**011** 4	**012** ③
013 ④	**014** ②	**015** 8	**016** ④	**017** 1194
018 ①	**019** 25	**020** ③	**021** ④	**022** ③
023 35	**024** ③	**025** ②	**026** 432	**027** 480
028 ①	**029** 52	**030** ④	**031** ②	**032** 2
033 288	**034** ⑤	**035** ②	**036** 1440	**037** ⑤
038 ②	**039** 8	**040** ③	**041** 243	
042 (1) 100	(2) 40	(3) 60	**043** ⑤	**044** ④
045 250	**046** ③	**047** 20	**048** ④	**049** ⑤
050 ②	**051** 45	**052** 30		

008 나오는 눈의 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 눈의 수의 합이 3 또는 6 또는 9 또는 12일 때이다.

(i) 눈의 수의 합이 3인 경우는

$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2가지

(ii) 눈의 수의 합이 6인 경우는

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 5가지

(iii) 눈의 수의 합이 9인 경우는

$(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$의 4가지

(iv) 눈의 수의 합이 12인 경우는

$(6, 6)$의 1가지

(i)~(iv)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$2+5+4+1=12$

009 1부터 100까지의 자연수 중에서

2의 배수는 50개, 3의 배수는 33개,

2와 3의 최소공배수인 6의 배수는 16개이므로

2의 배수 또는 3의 배수의 개수는

$50+33-16=67$ …… ㉮

따라서 2 또는 3으로 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는

$100-67=33$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 2의 배수 또는 3의 배수의 개수 구하기	60%
㉯ 2 또는 3으로 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수 구하기	40%

010 x, y가 양의 정수이므로 $3 \le x+y \le 5$를 만족시키는 경우는 $x+y=3$ 또는 $x+y=4$ 또는 $x+y=5$일 때이다.

(ⅰ) $x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개

(ⅱ) $x+y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3개

(ⅲ) $x+y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$의 4개

(ⅰ)~(ⅲ)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 순서쌍의 개수는
$2+3+4=9$

011 x, y, z가 양의 정수이므로 $x \ge 1$, $y \ge 1$, $z \ge 1$
$x+2y+3z=10$에서 $3z \le 7$, 즉 $z \le \frac{7}{3}$이므로
$z=1$ 또는 $z=2$ …… ㉮

(ⅰ) $z=1$일 때,
$x+2y+3=10$, 즉 $x+2y=7$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(5, 1)$, $(3, 2)$, $(1, 3)$의 3개

(ⅱ) $z=2$일 때,
$x+2y+6=10$, 즉 $x+2y=4$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(2, 1)$의 1개 …… ㉯

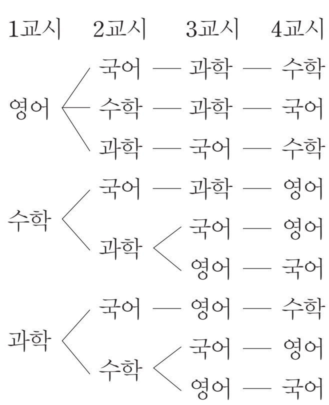
(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 순서쌍의 개수는
$3+1=4$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 양의 정수 z의 경우 구하기	30%
㉯ ㉮의 경우에 따라 순서쌍 (x, y)의 개수 구하기	50%
㉰ 순서쌍 (x, y, z)의 개수 구하기	20%

1등급 비법

x, y, z 중에서 계수가 가장 큰 z를 기준으로 경우를 나누는 것이 편리하다.

012 1반의 1교시는 국어, 2교시는 영어, 3교시는 수학, 4교시는 과학인 경우에 대하여 2반의 시간표를 만들어 보면 다음과 같이 9가지가 있다.

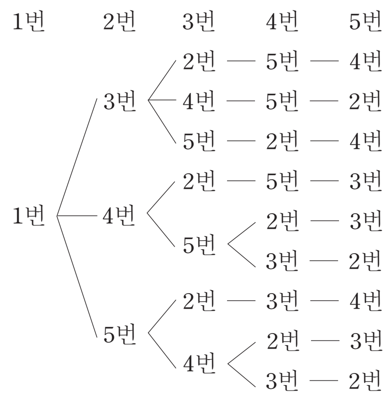


같은 방법으로 1반의 1교시는 국어, 2교시는 영어, 3교시는 과학, 4교시는 수학인 경우에 대하여 2반의 시간표를 만드는 방법도 9가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는 $9+9=18$

1등급 비법

규칙성을 찾기 어려운 경우의 수를 구할 때에는 수형도를 그리면 중복되지 않고 빠짐없이 모든 경우를 나열할 수 있다.

013 좌석 번호가 1번인 사람이 1번 자리에 앉고 나머지 4명은 다른 번호의 좌석에 앉는 경우를 구해 보면 다음과 같이 9가지가 있다.



같은 방법으로 좌석 번호가 2번인 사람이 2번 자리에 앉는 경우, 좌석 번호가 3번인 사람이 3번 자리에 앉는 경우, 좌석 번호가 4번인 사람이 4번 자리에 앉는 경우, 좌석 번호가 5번인 사람이 5번 자리에 앉는 경우도 각각 9가지씩 있다.
따라서 구하는 방법의 수는 $9+9+9+9+9=45$

014 $(a+b+c)(x+y)^2=(a+b+c)(x^2+2xy+y^2)$에서 a, b, c에 곱해지는 항이 각각 x^2, $2xy$, y^2의 3개이므로 구하는 항의 개수는 $3 \cdot 3=9$

015 A → C로 가는 방법의 수는 2
A → B → C로 가는 방법의 수는 $3 \cdot 2=6$
따라서 구하는 방법의 수는 $2+6=8$

1등급 비법

동시에 갈 수 없는 길이면 합의 법칙, 이어지는 길이면 곱의 법칙을 이용한다.

016 서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 세 주사위의 눈의 수가 모두 홀수인 경우뿐이므로 이 경우의 수는
$3 \cdot 3 \cdot 3=27$
따라서 서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수는
$6 \cdot 6 \cdot 6-27=189$

017 360을 소인수분해하면 $360=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ …… ㉮
360의 양의 약수의 개수는
$(3+1)(2+1)(1+1)=24$ $\therefore a=24$ …… ㉯

360의 양의 약수의 총합은

$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=1170$

$\therefore b=1170$ …… ㉰

$\therefore a+b=24+1170=1194$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ 360을 소인수분해하기	20%
㉯ a의 값 구하기	30%
㉰ b의 값 구하기	30%
㉱ $a+b$의 값 구하기	20%

1등급 비법

자연수 N이 $N=a^pb^qc^r$(a, b, c는 서로 다른 소수, p, q, r는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때

(1) N의 양의 약수의 개수는 $(p+1)(q+1)(r+1)$

(2) N의 양의 약수의 총합은

$(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots+c^r)$

018 500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동전 4개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 7개, 100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, …, 3500원의 8가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원, 400원의 5가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는 $8\cdot5-1=39$

019 조건 (나)에서 $f(-2)=-f(2)$, $f(-1)=-f(1)$, $f(0)=0$이므로 $f(-2)=1$일 때, $f(2)=-1$로, $f(-1)=2$일 때, $f(1)=-2$로 정해진다.

따라서 $f(-2)$와 $f(-1)$이 될 수 있는 값은 각각 -2, -1, 0, 1, 2의 5가지이므로 구하는 함수 f의 개수는

$5\cdot5=25$

020 $_nP_2+4_nP_1=28$에서

$n(n-1)+4n=28$

$n^2+3n-28=0$, $(n+7)(n-4)=0$

$\therefore n=4$ ($\because n\ge2$)

021 $\dfrac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2}=\dfrac{8}{7}$에서

$\dfrac{(n-1)!}{n!}\cdot\dfrac{(n+1)!}{n!}=\dfrac{8}{7}$

$\dfrac{1}{n}\cdot(n+1)=\dfrac{8}{7}$, $7n+7=8n$ $\quad\therefore n=7$

022 $_nP_4:2_nP_2=3:1$에서 $_nP_4=6_nP_2$

$n(n-1)(n-2)(n-3)=6n(n-1)$

$_nP_4$에서 $n\ge4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$(n-2)(n-3)=6$, $n^2-5n=0$, $n(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n\ge4$)

$\therefore {}_5P_2=5\cdot4=20$

023 $_nP_4+35_{n-1}P_2-9_nP_3=0$에서

$n(n-1)(n-2)(n-3)+35(n-1)(n-2)$

$-9n(n-1)(n-2)=0$ …… ㉮

$_nP_4$에서 $n\ge4$이므로 양변을 $(n-1)(n-2)$로 나누면

$n(n-3)+35-9n=0$

$n^2-12n+35=0$, $(n-5)(n-7)=0$

$\therefore n=5$ 또는 $n=7$ …… ㉯

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 곱은

$5\cdot7=35$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 순열의 수를 n에 대한 식으로 정리하기	40%
㉯ n의 값 구하기	40%
㉰ 모든 n의 값의 곱 구하기	20%

024 지혜가 3등을 하는 경우의 수는 지혜를 제외한 4명의 학생을 1, 2, 4, 5등에 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$

025 a, e를 한 문자로 보고 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$

a와 e의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot2=48$

026 (i) 남자 3명이 앞줄에서 옆으로 나란히 서로 이웃하여 서는 방법의 수는

$3!\cdot4!=144$ …… ㉮

(ii) 남자 3명이 뒷줄에서 옆으로 나란히 서로 이웃하여 서는 방법의 수는

$_4P_3\cdot(2\cdot3!)=288$ …… ㉯

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$144+288=432$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 남자 3명이 앞줄에 서는 방법의 수 구하기	40%
㉯ 남자 3명이 뒷줄에 서는 방법의 수 구하기	40%
㉰ 남자 3명이 앞줄 또는 뒷줄에 서는 방법의 수 구하기	20%

027 남학생 3명이 앉을 3개의 의자와 빈 의자 1개, 총 4개의 의자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$

4개의 의자 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중 2개를 택하여 여학생이 앉을 의자를 놓는 방법의 수는 $_5P_2=20$

따라서 구하는 방법의 수는 $24\cdot20=480$

다른풀이 6개의 의자에 5명이 앉는 방법의 수는 $_6P_5$

6개의 의자에 여학생이 이웃하여 앉는 방법의 수는 $5!\cdot2!$

따라서 구하는 방법의 수는 $_6P_5-5!\cdot2!=480$

028 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$6!=720$

모음은 O, E의 2개이므로 양 끝에 모두 모음이 오도록 나열하는 방법의 수는

$2!\cdot 4!=48$

따라서 구하는 방법의 수는

$720-48=672$

1등급 비법

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

029 여섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 3개를 택하여 만든 세 자리 자연수가 짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

백의 자리, 십의 자리에는 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 2개의 숫자가 올 수 있으므로 그 경우의 수는

${}_5P_2=20$ …… ㉮

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

백의 자리에는 0과 2를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있고, 십의 자리에는 백의 자리의 숫자와 2를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있으므로 그 경우의 수는

$4\cdot 4=16$ …… ㉯

(iii) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

백의 자리에는 0과 4를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있고, 십의 자리에는 백의 자리의 숫자와 4를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있으므로 그 경우의 수는

$4\cdot 4=16$ …… ㉰

이상에서 구하는 짝수의 개수는

$20+16+16=52$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ 일의 자리의 숫자가 0인 짝수의 개수 구하기	30%
㉯ 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수 구하기	30%
㉰ 일의 자리의 숫자가 4인 짝수의 개수 구하기	30%
㉱ 세 자리 자연수 중 짝수의 개수 구하기	10%

030 24000보다 큰 수는 24□□□, 25□□□, 3□□□□, 4□□□□, 5□□□□ 꼴이다.

(i) 24□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

(ii) 25□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

(iii) 3□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

(iv) 4□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

(v) 5□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$6+6+24+24+24=84$

031 (i) A□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

(ii) B□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

(iii) C□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

(iv) DA□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$

(v) DB□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$

이때 A로 시작하는 문자열부터 DB로 시작하는 문자열까지 총 개수는 $24\cdot 3+6\cdot 2=84$이므로

DCABE, DCAEB, DCBAE, DCBEA, DCEAB, …

에서 89번째 문자열은 DCEAB이다.

따라서 89번째 문자열의 마지막 문자는 B이다.

032 서로 다른 한 자리의 자연수 6개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $6!=720$

서로 다른 한 자리의 자연수 6개 중에서 짝수의 개수를 n이라 하면 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하는 방법의 수는

${}_nP_2\cdot 4!={}_nP_2\cdot 24$ …… ㉮

이때 적어도 한쪽 끝에 홀수가 오도록 나열하는 방법의 수가 432이므로

$720-{}_nP_2\cdot 24=432,\ {}_nP_2\cdot 24=288 \qquad \therefore\ {}_nP_2=12$

즉, $n(n-1)=4\cdot 3$이므로 $n=4$ …… ㉯

따라서 짝수의 개수가 4이므로 홀수의 개수는

$6-4=2$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 짝수의 개수를 n이라 하고, 양 끝에 모두 짝수가 오도록 나열하는 방법의 수 구하기	30%
㉯ 주어진 조건을 이용하여 n의 값 구하기	50%
㉰ 홀수의 개수 구하기	20%

033 운전석에는 아버지 또는 어머니만 앉을 수 있으므로 운전석에 앉는 방법의 수는 ${}_2P_1=2$

할아버지와 할머니는 가운데 줄에만 앉을 수 있으므로 그 방법의 수는 ${}_3P_2=6$

나머지 4명의 가족이 빈 자리에 앉는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는 $2\cdot 6\cdot 24=288$

034 부모가 마주 보도록 원형의 탁자에 앉은 다음 나머지 네 자리에 4명이 앉으면 되므로 구하는 방법의 수는

$4!=24$

다른풀이 아버지의 자리가 결정되면 어머니의 자리는 마주 보는 자리에 고정되므로 구하는 방법의 수는 아버지와 나머지 4명의 가족, 즉 5명이 원형의 탁자에 둘러앉는 방법의 수와 같다.

$\therefore\ (5-1)!=4!=24$

035 A, B를 한 묶음으로 생각하여 5개의 용기를 원형의 실험 기구에 넣는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

A와 B의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\cdot 2=48$

036 남학생 5명이 원형의 탁자에 둘러앉는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$ …… ㉮

남학생 사이사이의 5개의 자리에 여학생 3명이 앉는 방법의 수는

${}_5P_3=60$ …… ㉯

따라서 구하는 방법의 수는

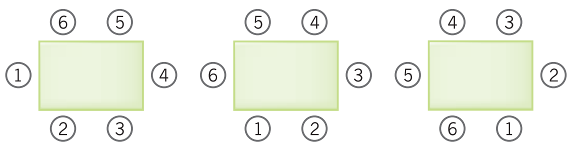
$24 \cdot 60=1440$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 남학생 5명이 앉는 방법의 수 구하기	40%
㉯ 여학생 3명이 앉는 방법의 수 구하기	40%
㉰ 여학생끼리 이웃하지 않게 앉는 방법의 수 구하기	20%

037 6명이 원형의 탁자에 둘러앉는 방법의 수는

$(6-1)!=5!=120$

이때 원형의 탁자에 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 3가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는

$120 \cdot 3=360$

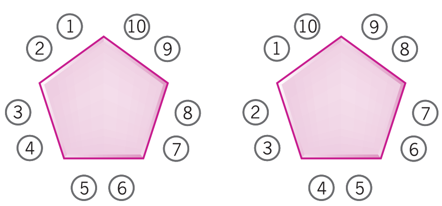
1등급 비법

다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 방법의 수를 구할 때에는 원형으로 배열하는 방법의 수와 다각형으로 배열할 때 서로 다른 경우의 수를 구하여 곱한다.

038 10명이 원형의 탁자에 둘러앉는 방법의 수는

$(10-1)!=9!$

이때 원형의 탁자에 둘러앉는 한 가지 방법에 대하여 정오각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 2가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는

$2 \cdot 9!$

039 가운데 삼각형을 칠하는 방법의 수는 4이고, 나머지 3개의 삼각형을 칠하는 방법의 수는 가운데 삼각형에 칠한 색을 제외한 3가지 색을 원형으로 배열하는 방법의 수와 같으므로

$(3-1)!=2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$4 \cdot 2=8$

040 가운데 사각형을 칠하는 방법의 수는 9이고, 나머지 8개의 사각형을 칠하는 방법의 수는 가운데 사각형에 칠한 색을 제외한 8가지 색을 원형으로 배열하는 방법의 수와 같으므로

$(8-1)!=7!$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 사각형 모양에서는 다음 그림과 같이 2가지의 서로 다른 경우가 존재한다.

①	②	③
⑧		④
⑦	⑥	⑤

⑧	①	②
⑦		③
⑥	⑤	④

따라서 구하는 방법의 수는

$9 \cdot 7! \cdot 2=18 \cdot 7!$

041 서로 다른 3개의 동아리에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

042 (1) 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

십의 자리, 일의 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$4 \cdot 25=100$ …… ㉮

(2) 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3의 2개이다.

따라서 구하는 홀수의 개수는

$4 \cdot 5 \cdot 2=40$ …… ㉯

(3) 세 자리 자연수 중 짝수의 개수는

$100-40=60$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 세 자리 자연수의 개수 구하기	40%
㉯ 세 자리 자연수 중 홀수의 개수 구하기	40%
㉰ 세 자리 자연수 중 짝수의 개수 구하기	20%

043 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이고, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리 중에서 0이 오는 자리를 정하는 경우의 수는 3이다.

남은 두 자리에 올 수 있는 숫자의 개수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_6\Pi_2=6^2=36$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6 \cdot 3 \cdot 36=648$

044 1000보다 작은 자연수의 개수는 999이고,
세 자리 이하의 자연수에서 4와 5가 들어가지 않는 수의 개수는 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9의 8개에서 3개를 택하는 중복순열의 수에서 000의 1개를 제외한 수의 개수와 같으므로
${}_8\Pi_3-1=8^3-1=511$
따라서 구하는 수의 개수는
$999-511=488$

045 $f(1)+f(2)=3$인 경우는
$f(1)=1$, $f(2)=2$ 또는 $f(1)=2$, $f(2)=1$의 2가지 …… ㉮
$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 방법의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_5\Pi_3=5^3=125$ …… ㉯
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$2\cdot125=250$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 방법의 수 구하기	30%
㉯ $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 방법의 수 구하기	50%
㉰ 함수 f의 개수 구하기	20%

046 $f(3)=3$이므로
A : $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 방법의 수는 1, 2, 3, 4의 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3=4^3=64$
B : $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 방법의 수는 1, 2, 4의 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로
$3!=6$
C : $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$의 값도 3이어야 하므로 이 방법의 수는 1이다.
$\therefore A-2B+C=64-2\cdot6+1=53$

047 b와 d를 제외한 5개의 문자 a, a, a, c, c를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{5!}{3!2!}=10$
양 끝에 b와 d를 나열하는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는 $10\cdot2=20$

048 (i) 8개의 문자 t, o, m, o, r, r, o, w를 일렬로 나열하는 방법의 수는
$\dfrac{8!}{3!2!}=3360$
(ii) m과 w를 한 문자로 생각하여 7개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{7!}{3!2!}=420$
이때 m과 w의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 m과 w가 이웃하도록 나열하는 방법의 수는
$420\cdot2=840$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$3360-840=2520$

다른풀이 m과 w를 제외한 6개의 문자 t, o, o, r, r, o를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{6!}{3!2!}=60$
6개의 문자 사이사이와 양 끝의 7개의 자리 중 2개를 택하여 m과 w를 나열하는 방법의 수는 ${}_7P_2=42$
따라서 구하는 방법의 수는 $60\cdot42=2520$

049 a, d와 c, e의 순서가 각각 정해져 있으므로 a, d를 모두 A로, c, e를 모두 B로 생각하여 7개의 문자 A, b, B, A, B, f, g를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 A는 a, 두 번째 A는 d로, 첫 번째 B는 c, 두 번째 B는 e로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
$\dfrac{7!}{2!2!}=1260$

050 2, 4와 1, 3, 5의 순서가 각각 정해져 있으므로 2, 4를 모두 A로, 1, 3, 5를 모두 B로 생각하여 6장의 카드 B, A, B, A, B, 6을 일렬로 나열한 후, 첫 번째 A는 2, 두 번째 A는 4로, 첫 번째 B는 1, 두 번째 B는 3, 세 번째 B는 5로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
$\dfrac{6!}{2!3!}=60$

051 각 자리 숫자의 합이 9인 경우는
(0, 0, 9), (0, 1, 8), (0, 2, 7), (0, 3, 6), (0, 4, 5), (1, 1, 7), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3) …… ㉮
(i) (0, 0, 9)로 만들 수 있는 세 자리 자연수는
900의 1개
(ii) (0, 1, 8), (0, 2, 7), (0, 3, 6), (0, 4, 5)로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
$4\cdot(2\cdot2!)=16$
(iii) (1, 1, 7), (1, 4, 4), (2, 2, 5)로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
$3\cdot\dfrac{3!}{2!}=9$
(iv) (1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4)로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
$3\cdot3!=18$
(v) (3, 3, 3)으로 만들 수 있는 세 자리 자연수는
333의 1개 …… ㉯
이상에서 구하는 자연수의 개수는
$1+16+9+18+1=45$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 각 자리의 숫자의 합이 9인 경우 구하기	30%
㉯ 각 경우의 세 자리 자연수의 개수 구하기	50%
㉰ 각 자리의 숫자의 합이 9인 세 자리 자연수의 개수 구하기	20%

052 A에서 P까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{5!}{4!}=5$

P에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{6!}{5!}=6$

따라서 A에서 출발하여 P를 거쳐 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$5\cdot6=30$

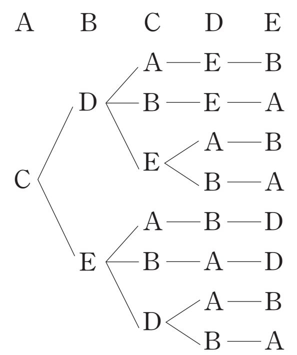
내신 완성 1등급문제 pp. 21~23

053 ②	**054** 16	**055** ③	**056** ①	**057** ④
058 36	**059** ①	**060** ②	**061** 30	**062** ⑤
063 ③	**064** 54			

053 합의 법칙

전략 수형도를 그려서 방법의 수를 구한다.

A학생이 C학생의 과제를 확인하는 경우를 구해 보면 다음과 같이 8가지가 있다.



같은 방법으로 A학생이 D학생과 E학생의 과제를 확인하는 경우도 각각 8가지씩 있다.

따라서 구하는 방법의 수는

$8+8+8=24$

054 합의 법칙

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 방정식 $f(x)=0$의 판별식 D가 $D<0$이어야 함을 이용한다.

이차함수 $y=x^2-(a+b)x+ab+1$의 그래프와 x축이 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2-(a+b)x+ab+1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 하므로

$D=(a+b)^2-4(ab+1)<0$

$(a-b)^2-4<0$

$(a-b+2)(a-b-2)<0$

$\therefore\ -2<a-b<2$ …… ㉮

a, b는 주사위의 눈의 수이므로 $a-b$의 값은 정수이다.

(i) $a-b=-1$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$의 5개

(ii) $a-b=0$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$의 6개

(iii) $a-b=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 5)$의 5개 …… ㉯

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$5+6+5=16$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 이차방정식의 판별식을 이용하여 $a-b$의 값의 범위 구하기	30%
㉯ $a-b$의 값에 따라 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	50%
㉰ 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	20%

055 곱의 법칙

전략 지불할 수 있는 방법의 수는 곱의 법칙을 이용하여 구한 다음 0원을 지불하는 경우를 제외하고, 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전과 100원짜리 동전을 50원짜리 동전으로 바꾸어 생각한다.

풀이 (i) 지불할 수 있는 방법의 수

500원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개의 2가지

100원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, …, 5개의 6가지

50원짜리 동전 10개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, …, 10개의 11가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$2\cdot6\cdot11-1=131$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

500원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 금액이 같고, 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액과 50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액이 같다.

따라서 500원짜리 동전 1개를 50원짜리 10개, 100원짜리 동전 5개를 50원짜리 동전 10개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 30개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같으므로

0원, 50원, 100원, 150원, …, 1450원, 1500원의 31가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$31-1=30$

(i), (ii)에서 $m=131$, $n=30$이므로

$m-n=131-30=101$

056 ${}_n\mathrm{P}_r$의 계산

전략 ${}_n\mathrm{P}_r=\frac{n!}{(n-r)!}$ $(0\le r\le n)$을 이용한다.

풀이 ${}_{n-1}\mathrm{P}_r+r\cdot{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

$$=\frac{(n-1)!}{\boxed{(n-r-1)!}}+r\cdot\frac{(n-1)!}{\boxed{(n-r)!}}$$

$$=\frac{(n-1)!\cdot(n-r)}{(n-r-1)!\cdot(n-r)}+r\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\cdot\{(n-r)+r\}$$

$$=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\cdot\boxed{n}$$

$$=\frac{\boxed{n!}}{(n-r)!}={}_n\mathrm{P}_r$$

∴ (가) $(n-r-1)!$, (나) $(n-r)!$, (다) n, (라) $n!$

057 순열의 수

전략 254보다 큰 짝수는 백의 자리의 숫자가 3 이상이고 일의 자리의 숫자가 짝수임을 이용한다.

풀이 254보다 큰 짝수는 3□0, 3□2, 3□4, 4□0, 4□2, 5□0, 5□2, 5□4 꼴이다.

(i) 3□0, 3□2, 3□4 꼴인 자연수의 개수는 $3\cdot{}_4\mathrm{P}_1=12$

(ii) 4□0, 4□2 꼴인 자연수의 개수는 $2\cdot{}_4\mathrm{P}_1=8$

(iii) 5□0, 5□2, 5□4 꼴인 자연수의 개수는 $3\cdot{}_4\mathrm{P}_1=12$

이상에서 구하는 자연수의 개수는 $12+8+12=32$

058 순열의 수

전략 아버지와 어머니가 A열에 앉을 경우와 B열에 앉을 경우로 나누어 구한다.

(i) 아버지와 어머니가 A열에 이웃하여 앉는 방법의 수는

$2\cdot2!\cdot3!=24$ …… ㉮

(ii) 아버지와 어머니가 B열에 이웃하여 앉는 방법의 수는

$2!\cdot3!=12$ …… ㉯

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

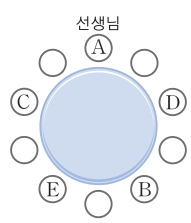
$24+12=36$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 아버지와 어머니가 A열에 앉는 방법의 수 구하기	40%
㉯ 아버지와 어머니가 B열에 앉는 방법의 수 구하기	40%
㉰ 아버지와 어머니가 같은 열에 이웃하여 앉는 방법의 수 구하기	20%

059 원순열

전략 주어진 규칙에 따라 남학생과 여학생의 자리를 정하고, 정해진 자리에 5명의 남학생과 4명의 여학생이 앉는 방법의 수를 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 선생님(A)을 기준으로 교실을 나가는 순서는 B → C → D → E → A이다.



따라서 구하는 경우의 수는 A, B, C, D, E의 자리에 선생님과 여학생이 앉고 남은 다섯 자리에 남학생이 앉는 방법의 수와 같으므로

$(5-1)!\cdot5!=2880$

060 원순열

전략 남학생 4명을 먼저 자리에 앉히고, 여학생을 앉히는 방법의 수를 구한다.

풀이 남학생 4명이 정사각형 모양의 탁자의 각 변에 1명씩 앉을 때, 각각 오른쪽 또는 왼쪽 의자를 선택하여 앉을 수 있으므로 그 방법의 수는

$(4-1)!\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=96$

남은 네 개의 의자에 여학생 4명이 앉는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$96\cdot24=2304$

1등급 비법

정사각형 모양의 탁자의 한 변에는 의자가 2개씩이므로 남학생 4명이 자리에 앉을 때, 4명 모두 의자를 고르는 것까지 고려해야 한다.

061 중복순열

전략 세 자리 자연수의 개수에서 3이 들어가지 않는 자연수의 개수를 뺀다.

풀이 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3\cdot{}_4\Pi_2=48$ …… ㉮

3을 제외한 0, 1, 2의 3개의 숫자에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2\cdot{}_3\Pi_2=18$ …… ㉯

따라서 구하는 자연수의 개수는

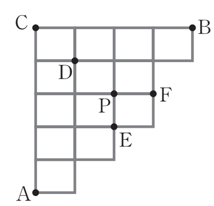
$48-18=30$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 세 자리 자연수의 개수 구하기	40%
㉯ 3이 들어가지 않는 자연수의 개수 구하기	40%
㉰ 적어도 한 번은 3이 들어가는 자연수의 개수 구하기	20%

062 같은 것이 있는 순열

전략 가로로 한 칸 가는 것을 a, 세로로 한 칸 가는 것을 b라 하고, A에서 B까지 최단 거리로 갈 수 있는 지점을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 네 지점 C, D, E, F를 잡으면



(i) A → C → B로 가는 방법의 수는 1

(ii) A → D → B로 가는 방법의 수는

$\frac{5!}{4!}\cdot\frac{4!}{3!}=20$

(iii) A → E → F → B로 가는 방법의 수는(P는 거치지 않는다.)

$\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)\cdot1\cdot\left(\frac{3!}{2!}-1\right)=10$

이상에서 구하는 방법의 수는

$1+20+10=31$

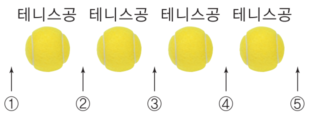
1등급 비법

A에서 B로 갈 때, 장애물이 있는 경우에는 반드시 거쳐야 하는 점을 잡아 최단 거리로 가는 방법의 수를 구한다.

063 순열의 수

1단계 조건 ㈎, ㈏를 만족시키는 경우의 수를 구한다.

조건 ㈎에서 야구공은 연속하여 꺼낼 수 없으므로 테니스공 4개를 꺼내는 사이사이나 앞뒤에 야구공을 꺼내야 한다.



위의 그림에서 조건 ㈏를 만족시키는 야구공 2개의 위치는 (①, ③), (②, ③), (②, ④), (③, ④), (③, ⑤)의 5가지이다.

2단계 순열의 수를 이용하여 서로 다른 테니스공 4개와 서로 다른 야구공 2개를 일렬로 나열하는 방법의 수를 구한다.

서로 다른 테니스공 4개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

위의 그림에서 정해진 2개의 위치에 서로 다른 야구공 2개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$2!=2$

3단계 곱의 법칙을 이용하여 6개의 공을 꺼내는 방법의 수를 구한다.

조건 ㈎, ㈏를 모두 만족시키면서 6개의 공을 상자에서 모두 꺼내는 방법의 수는

$5\cdot24\cdot2=240$

064 같은 것이 있는 순열

1단계 작은 정육면체에서 가로로 1칸 가는 것을 a, 세로로 1칸 가는 것을 b, 위로 1칸 가는 것을 c로 생각하여 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 구한다.

꼭짓점 A에서 꼭짓점 B로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 2번씩 이동해야 하므로 그 방법의 수는

$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$

2단계 꼭짓점 A에서 점 P를 거쳐 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 구한다

꼭짓점 A에서 점 P로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 1번씩 이동해야 하므로 그 방법의 수는 $\dfrac{3!}{1!1!1!}=6$

같은 방법으로 점 P에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수도 6이다.

따라서 꼭짓점 A에서 점 P를 거쳐 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 $6\cdot6=36$

3단계 꼭짓점 A에서 점 P를 거치지 않고 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 구한다.

꼭짓점 A에서 점 P를 거치지 않고 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$90-36=54$

02 조합

교과서에서 뽑은 기본 문제 pp. 24~25

065 (1) 9 (2) 8 (3) 7
066 (1) 84 (2) 40
067 286
068 (1) 3 (2) 6
069 (1) 2 (2) 2
070 40
071 7

065 (1) ${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$이므로

$\dfrac{n(n-1)}{2}=36$에서 $n(n-1)=72=9\cdot8$

$\therefore\ n=9$

(2) ${}_nC_3={}_nC_{n-3}$이므로 ${}_nC_3={}_nC_5$에서

$n-3=5 \qquad \therefore\ n=8$

(3) (ⅰ) ${}_{10}C_r={}_{10}C_{r-4}$에서 $r=r-4$

이 식을 만족시키는 r의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) ${}_{10}C_r={}_{10}C_{10-r}$이므로 ${}_{10}C_{10-r}={}_{10}C_{r-4}$에서

$10-r=r-4 \qquad \therefore\ r=7$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $r=7$

066 (1) 구하는 방법의 수는 9명 중에서 3명을 택하는 방법의 수와 같으므로 ${}_9C_3=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$

(2) 남자 5명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

여자 4명 중에서 1명을 뽑는 방법의 수는 ${}_4C_1=4$

따라서 구하는 방법의 수는 $10\cdot4=40$

067 구하는 방법의 수는 서로 다른 4개 중에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_{10}={}_{4+10-1}C_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=\dfrac{13\cdot12\cdot11}{3\cdot2\cdot1}=286$

068 (1) 두 집합의 원소가 각각 1개, 2개인 경우의 수는

${}_3C_1\cdot{}_2C_2=3\cdot1=3$

이므로 $S(3,\ 2)=3$

(2) 세 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 2개인 경우의 수는

${}_4C_1\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_2\cdot\dfrac{1}{2!}=4\cdot3\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=6$

이므로 $S(4,\ 3)=6$

069 (1) $5=3+1+1=2+2+1$이므로

$P(5,\ 3)=2$

(2) $6=3+1+1+1=2+2+1+1$이므로

$P(6,\ 4)=2$

070 $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(x^2)^{5-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r={}_5C_r2^rx^{10-3r}$

x^4항은 $10-3r=4$일 때이므로 $r=2$
따라서 x^4의 계수는
${}_5C_2\cdot 2^2=10\cdot 4=40$

071 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$에서
${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$
이때 $2^n-1=127$이므로
$2^n=128=2^7$
$\therefore n=7$

내신 분석 기출문제

pp. 26~36

072 ①	073 ⑤	074 ③	075 7	
076 (1) 210	(2) 15	(3) 195	077 ③	078 ⑤
079 ②	080 ③	081 31	082 ②	083 ①
084 ④	085 ③	086 15	087 ④	088 ①
089 ①	090 ②	091 ④	092 27	093 ③
094 ④	095 15	096 ②	097 15	098 ③
099 ③	100 ③	101 420	102 ①	103 ②
104 ⑤	105 ③	106 6	107 ⑤	108 ①
109 −12	110 30	111 ④	112 23	113 32
114 ④	115 9	116 ②	117 ④	

072 ${}_{12}C_{2r+1}={}_{12}C_{7-r}$에서
$2r+1=7-r$ 또는 $(2r+1)+(7-r)=12$
(i) $2r+1=7-r$일 때,
$3r=6 \qquad \therefore r=2$
(ii) $(2r+1)+(7-r)=12$일 때,
$r+8=12 \qquad \therefore r=4$
(i), (ii)에서 구하는 모든 자연수 r의 값의 곱은
$2\cdot 4=8$

073 조건 (가)에서
$r-1=3r+1$ 또는 $(r-1)+(3r+1)=8$
(i) $r-1=3r+1$일 때,
$2r=-2 \qquad \therefore r=-1$
그런데 조건을 만족시키는 자연수 r의 값은 존재하지 않는다.
(ii) $(r-1)+(3r+1)=8$일 때,
$4r=8 \qquad \therefore r=2$
(i), (ii)에서 $r=2$
조건 (나)에서 ${}_nC_2+{}_nC_3=2\cdot{}_{2n}C_1$
${}_nC_2+{}_nC_3={}_{n+1}C_3$이므로
${}_{n+1}C_3=2\cdot{}_{2n}C_1$
$\dfrac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3\cdot 2\cdot 1}=2\cdot 2n$
$n^3-n=24n,\ n^3-25n=0$
$n(n-5)(n+5)=0$
$\therefore n=0$ 또는 $n=5$ 또는 $n=-5$
이때 n은 자연수이므로 $n=5$
$\therefore nr=2\cdot 5=10$

074 이차방정식 $3x^2-3{}_nC_rx-5{}_nP_r=0$의 두 근이 -2, 5이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-2+5=\dfrac{3{}_nC_r}{3},\ (-2)\cdot 5=-\dfrac{5{}_nP_r}{3}$
$\therefore {}_nC_r=3,\ {}_nP_r=6$
이때 ${}_nP_r=r!{}_nC_r$이므로 $6=r!\cdot 3$
$r!=2 \qquad \therefore r=2$
${}_nP_2=6$에서 $n(n-1)=6=3\cdot 2$이므로
$n=3$
$\therefore n+r=3+2=5$

075 ${}_nC_1=n,\ {}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1},\ {}_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$
가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항의 성질에 의하여
$2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}=n+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$ …… ㉮
$n^2-n=n+\dfrac{1}{6}(n^3-3n^2+2n)$
$n^3-9n^2+14n=0$
$n(n-2)(n-7)=0$
$\therefore n=0$ 또는 $n=2$ 또는 $n=7$
$n>3$이므로 $n=7$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 등차중항의 성질을 이용하여 n에 대한 관계식 구하기	50%
㉯ n의 값 구하기	50%

076 (1) 전체 10명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는
${}_{10}C_4=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$ …… ㉮
(2) 남자 6명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는
${}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=15$ …… ㉯
(3) $210-15=195$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 4명을 뽑는 방법의 수 구하기	35%
㉯ 남자 4명을 뽑는 방법의 수 구하기	35%
㉰ 여자가 적어도 한 명 포함되도록 하는 방법의 수 구하기	30%

077 철수를 포함하여 4명을 뽑는 경우의 수는 철수를 제외한 9명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로
$a={}_9C_3$
철수를 포함하지 않고 4명을 뽑는 경우의 수는 철수를 제외한 9명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로
$b={}_9C_4$

$\therefore\ a+b={}_9C_3+{}_9C_4={}_{10}C_4$

1등급 비법

① 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수는 $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 뽑는 방법의 수와 같다.
➡ ${}_{n-k}C_{r-k}$
② 서로 다른 n개에서 특정한 k개를 제외하고 r개를 뽑는 방법의 수는 $(n-k)$개에서 r개를 뽑는 방법의 수와 같다.
➡ ${}_{n-k}C_r$

078 5권의 교과서 중에서 2권을 뽑는 방법의 수는
${}_5C_2=10$
3권의 문제집 중에서 2권을 뽑는 방법의 수는
${}_3C_2={}_3C_1=3$
4권의 책을 일렬로 꽂는 방법의 수는
$4!=24$
따라서 구하는 방법의 수는
$10\cdot3\cdot24=720$

1등급 비법

단순히 뽑는 것은 조합이고, 뽑은 다음 일렬로 나열하는 것은 순열이므로 뽑아서 나열하는 경우의 수는 조합의 수와 순열의 수를 각각 구한 후 이들을 곱하여 구한다.

079 □□□□□□에 2부터 7까지 6개의 자연수를 주어진 조건에 맞게 나열한다고 할 때, 3, 5가 나열되는 두 자리를 선택하는 경우의 수는
${}_6C_2=15$
이때 선택한 두 자리의 왼쪽에 3, 남은 자리에 5를 나열하면 된다.
남은 네 자리에 2, 4, 6이 나열되는 세 자리를 선택하는 경우의 수는
${}_4C_3={}_4C_1=4$
이때 선택한 세 자리의 왼쪽부터 작은 수를 차례로 나열하고 남은 한 자리에 7을 나열하면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
$15\cdot4\cdot1=60$

080 가로 방향의 4개의 평행선에서 2개, 세로 방향의 6개의 평행선에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형을 만들 수 있으므로 구하는 평행사변형의 개수는
${}_4C_2\cdot{}_6C_2=6\cdot15=90$

081 7개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는
${}_7C_3=35$ …… ㉮
한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는
${}_4C_3=4$ …… ㉯
이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는
$35-4=31$ …… ㉰

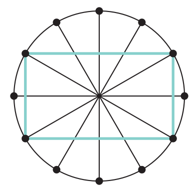
채점 기준	배점 비율
㉮ 7개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수 구하기	35%
㉯ 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수 구하기	35%
㉰ 삼각형의 개수 구하기	30%

1등급 비법

한 직선 위에 있는 서로 다른 n개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 이런 경우는 반드시 제외해야 한다.

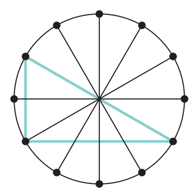
082 7개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는
${}_7C_3=35$
이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는
$35-3=32$

083 (i) 원에 내접하는 직사각형의 두 대각선의 교점은 원의 중심이고, 오른쪽 그림과 같이 원 위에 같은 간격으로 놓인 12개의 점을 원의 중심이 지나도록 연결한 선분은 6개이므로 12개의 점 중에서 4개를 연결하여 만들 수 있는 직사각형의 개수는 원의 중심을 지나는 6개의 선분 중 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로



$m={}_6C_2=15$

(ii) 원에 내접하는 직각삼각형의 빗변의 중점은 원의 중심이므로 12개의 점 중에서 3개를 연결하여 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는 원의 중심을 지나는 6개의 선분 중 1개를 택하고 남은 10개의 점 중 1개를 택하는 방법의 수와 같으므로



$n={}_6C_1\cdot{}_{10}C_1=6\cdot10=60$

(i), (ii)에서 $m+n=75$

1등급 비법

원의 지름에 대한 원주각의 크기는 $90°$이므로
① 6개의 지름 중 2개를 택하면 그 지름을 대각선으로 갖는 직사각형을 만들 수 있다.
② 6개의 지름 중 1개를 택하면 그 지름을 빗변으로 갖는 직각삼각형을 만들 수 있다.

084 집합 A의 모든 원소 a에 대하여 $f(a)\le a$를 만족시키는 $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 다음과 같다.
(i) $a=1$일 때, $f(1)\le1$에서
$f(1)$의 값은 1의 1가지
(ii) $a=2$일 때, $f(2)\le2$에서
$f(2)$의 값은 1, 2의 2개에서 1개를 택하면 되므로
${}_2C_1=2$(가지)

(iii) $a=3$일 때, $f(3) \le 3$에서

$f(3)$의 값은 1, 2, 3의 3개에서 1개를 택하면 되므로

${}_{3}C_{1}=3$(가지)

(iv) $a=4$일 때, $f(4) \le 4$에서

$f(4)$의 값은 1, 2, 3, 4의 4개에서 1개를 택하면 되므로

${}_{4}C_{1}=4$(가지)

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4=24$

085 $X=\{2, 3, 5, 7\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로

조건 (가), (나)에서 $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 1 또는 2

$f(5)$, $f(7)$의 값이 될 수 있는 수는

4 또는 5 또는 6 또는 7 또는 8

이때 $f(5)<f(7)$이어야 하므로 4, 5, 6, 7, 8의 5개에서 2개를 택하여 그 값이 작은 것부터 차례로 $f(5)$, $f(7)$에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_{2}C_{1} \cdot {}_{5}C_{2}=2 \cdot 10=20$

086 조건 (가)에서 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 6 또는 7

(i) $f(3)=6$일 때,

조건 (나)에서 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는

3 또는 4 또는 5

이때 $f(1)<f(2)$이어야 하므로 3, 4, 5의 3개에서 2개를 택하여 그 값이 작은 것부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$에 대응시키면 된다.

또, $f(4)$, $f(5)$의 값이 될 수 있는 수는 7 또는 8 또는 9

마찬가지로 $f(4)<f(5)$이어야 하므로 7, 8, 9의 3개에서 2개를 택하여 작은 것부터 차례로 $f(4)$, $f(5)$에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f의 개수는

${}_{3}C_{2} \cdot {}_{3}C_{2}=3 \cdot 3=9$ …… ㉮

(ii) $f(3)=7$일 때,

조건 (나)에서 $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는

3 또는 4 또는 5 또는 6

이때 $f(1)<f(2)$이어야 하므로 3, 4, 5, 6의 4개에서 2개를 택하여 그 값이 작은 것부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$에 대응시키면 된다.

또, $f(4)$, $f(5)$의 값이 될 수 있는 수는 8 또는 9이므로

$f(4)=8$, $f(5)=9$

따라서 함수 f의 개수는

${}_{4}C_{2} \cdot 1=6$ …… ㉯

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$9+6=15$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $f(3)=6$일 때, 함수 f의 개수 구하기	40%
㉯ $f(3)=7$일 때, 함수 f의 개수 구하기	40%
㉰ 함수 f의 개수 구하기	20%

087 (i) 조건 (가)에서 함수 f의 개수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개에서 5개를 택하여 그 값이 작은 것부터 차례로 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$에 대응시키는 방법의 수와 같으므로

$m={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$

(ii) 조건 (나)에서 $f(-2)=f(2)$, $f(-1)=f(1)$

함수 f의 개수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$n={}_{7}\Pi_{3}=7^3=343$

(i), (ii)에서 $m+n=364$

088 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{7}={}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=36$

089 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}H_{5}={}_{8}C_{5}={}_{8}C_{3}=56$

090 서로 다른 3개에서 m개를 택하는 중복조합의 수가 36이므로

${}_{3}H_{m}={}_{m+2}C_{m}={}_{m+2}C_{2}=\dfrac{(m+2)(m+1)}{2}=36$

$(m+2)(m+1)=72=9 \cdot 8$

$\therefore m=7$

따라서 고구마피자, 새우피자, 불고기피자를 적어도 하나씩 포함하여 7개를 주문하는 경우의 수는 3종류의 피자를 1개씩 주문하면 4개의 피자를 더 주문해야 하므로 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_{3}H_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$

1등급 비법

n명에게 같은 물건 r개를 나누어 줄 때, 한 명에게 적어도 한 개를 나누어 주는 방법의 수는 ${}_{n}H_{r-n}$이다. (단, $n \le r$)

091 주어진 조건에서 $f(1) \le f(2) \le f(3)$

따라서 구하는 함수 f의 개수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_{6}H_{3}={}_{8}C_{3}=56$

1등급 비법

두 집합 X, Y에 대하여 $n(X)=m$, $n(Y)=n$이라 하면 함수 $f: X \longrightarrow Y$ 중에서 $(x_1, x_2 \in X)$

① $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수

➡ ${}_{n}C_{m}$

② $x_1<x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수

➡ ${}_{n}H_{m}$

092 방정식 $x+y+z=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개의 문자에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$a={}_{3}H_{9}={}_{11}C_{2}=55$

$x-1=A$, $y-1=B$, $z-1=C$로 놓고 $x+y+z=9$에 대입하면

$(A+1)+(B+1)+(C+1)=9$
$\therefore A+B+C=6$
즉, 방정식 $x+y+z=9$를 만족시키는 양의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $A+B+C=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수와 같다.
따라서 서로 다른 3개의 문자에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$b={}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$
$\therefore a-b=55-28=27$

093 $2^a2^b2^c=1024$에서 $2^{a+b+c}=2^{10}$이므로 $a+b+c=10$
이때 $a-1=A$, $b-1=B$, $c-1=C$로 놓고 $a+b+c=10$에 대입하면
$(A+1)+(B+1)+(C+1)=10$
$\therefore A+B+C=7$
즉, 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $A+B+C=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수와 같다.
따라서 서로 다른 3개의 문자에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

094 $x=2X+1$, $y=2Y+1$, $z=2Z+1$로 놓고 $x+y+z=19$에 대입하면
$(2X+1)+(2Y+1)+(2Z+1)=19$
$2X+2Y+2Z=16 \qquad \therefore X+Y+Z=8$
즉, 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $X+Y+Z=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수와 같다.
따라서 서로 다른 3개의 문자에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

095 x, y, z, w가 양의 정수이므로 $x\ge1$, $y\ge1$, $z\ge1$, $w\ge1$
따라서 $x+y+z+w\ge4$이므로 부등식 $4\le x+y+z+w\le6$을 만족시키는 양의 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구하면 된다.
$x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$, $w-1=W$로 놓고
$4\le x+y+z+w\le6$에 대입하면
$4\le(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+(W+1)\le6$
$\therefore 0\le X+Y+Z+W\le2$
(i) $X+Y+Z+W=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수는
${}_4H_0={}_3C_0=1$ …… ㉮
(ii) $X+Y+Z+W=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수는
${}_4H_1={}_4C_1=4$ …… ㉯
(iii) $X+Y+Z+W=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W의 순서쌍 (X, Y, Z, W)의 개수는
${}_4H_2={}_5C_2=10$ …… ㉰
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+4+10=15$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ $x+y+z+w=4$일 때, 순서쌍의 개수 구하기	30%
㉯ $x+y+z+w=5$일 때, 순서쌍의 개수 구하기	30%
㉰ $x+y+z+w=6$일 때, 순서쌍의 개수 구하기	30%
㉱ 순서쌍의 개수 구하기	10%

096 105를 소인수분해하면 $105=3\times5\times7$이므로 구하는 방법의 수는 집합 $\{3, 5, 7\}$을 원소가 각각 1개, 2개인 두 집합으로 분할하는 방법의 수와 같다.
$\therefore {}_3C_1\cdot{}_2C_2=3\cdot1=3$

097 (i) 두 집합의 원소가 각각 1개, 4개인 경우의 수는
${}_5C_1\cdot{}_4C_4=5\cdot1=5$ …… ㉮
(ii) 두 집합의 원소가 각각 2개, 3개인 경우의 수는
${}_5C_2\cdot{}_3C_3=10\cdot1=10$ …… ㉯
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는 $5+10=15$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 두 집합의 원소가 각각 1개, 4개인 경우의 수 구하기	40%
㉯ 두 집합의 원소가 각각 2개, 3개인 경우의 수 구하기	40%
㉰ 주어진 집합을 2개의 집합으로 분할하는 방법의 수 구하기	20%

098 서로 다른 7권의 책을 3권, 2권, 2권으로 나누는 방법의 수는
${}_7C_3\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=35\cdot6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=105$

1등급 비법

서로 다른 n개를 p개, q개, r개$(p+q+r=n)$로 분할하는 방법의 수는
① p, q, r가 모두 다른 수일 때 : ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r$
② p, q, r 중에서 어느 두 수가 같을 때 : ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r\cdot\frac{1}{2!}$
③ p, q, r가 모두 같은 수일 때 : ${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_rC_r\cdot\frac{1}{3!}$

099 여자 9명 중 1명이 남자 3명과 한 조를 이루면 되므로 여자 9명을 4명, 4명, 1명으로 나누면 된다.
따라서 구하는 방법의 수는
${}_9C_4\cdot{}_5C_4\cdot{}_1C_1\cdot\frac{1}{2!}=126\cdot5\cdot1\cdot\frac{1}{2}=315$

100 $4=1+3=2+2$이므로 4명을 두 조로 나누는 방법은 다음과 같다.
(i) 1명, 3명으로 나누는 방법의 수는
${}_4C_1\cdot{}_3C_3=4\cdot1=4$
(ii) 2명, 2명으로 나누는 방법의 수는
${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\frac{1}{2}=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 4명을 두 조로 나누는 방법의 수는

$4+3=7$

이때 두 조를 2대의 보트에 배정하는 방법의 수는 $2!=2$이므로 구하는 방법의 수는

$7\cdot2=14$

101 (ⅰ) 서로 다른 6개의 구슬을 3개, 2개, 1개로 나누는 방법의 수는

$p={}_6C_3\cdot{}_3C_2\cdot{}_1C_1=60$ …… ㉮

(ⅱ) 서로 다른 6개의 구슬을 3개, 2개, 1개로 나누어 3명에게 나누어 주는 방법의 수는

$q={}_6C_3\cdot{}_3C_2\cdot{}_1C_1\cdot3!=60\cdot6=360$ …… ㉯

(ⅰ), (ⅱ)에서 $p+q=420$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ p의 값 구하기	40%
㉯ q의 값 구하기	40%
㉰ $p+q$의 값 구하기	20%

102 6명을 3명, 3명의 두 조로 나누는 방법의 수는

${}_6C_3\cdot{}_3C_3\cdot\dfrac{1}{2!}=20\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=10$

각 조에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하는 방법의 수는

${}_3C_1\cdot{}_3C_1=3\cdot3=9$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\cdot9=90$

103 7개의 팀을 4개, 3개의 팀으로 나누는 방법의 수는

${}_7C_4\cdot{}_3C_3=35\cdot1=35$

4개의 팀을 2개, 2개의 팀으로 나누는 방법의 수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\dfrac{1}{2!}=6\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=3$

3개의 팀을 2개, 1개의 팀으로 나누는 방법의 수는

${}_3C_2\cdot{}_1C_1=3$

따라서 구하는 방법의 수는 $35\cdot3\cdot3=315$

104 $9=4+1+1+1+1+1=3+2+1+1+1+1$

$=2+2+2+1+1+1$

$=3+1+1+1+1+1+1=2+2+1+1+1+1+1$

$=2+1+1+1+1+1+1+1$

$=1+1+1+1+1+1+1+1+1$

따라서 구하는 방법의 수는

$P(9,\ 6)+P(9,\ 7)+P(9,\ 8)+P(9,\ 9)=3+2+1+1=7$

105 $11=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1\text{이 }11\text{개}}$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1\text{이 }9\text{개}}+2$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1\text{이 }8\text{개}}+3$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1\text{이 }7\text{개}}+4=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1\text{이 }7\text{개}}+2+2$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1\text{이 }6\text{개}}+5=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1\text{이 }6\text{개}}+2+3$

$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{1\text{이 }5\text{개}}+6=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{1\text{이 }5\text{개}}+2+4$

$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{1\text{이 }5\text{개}}+3+3=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{1\text{이 }5\text{개}}+2+2+2$

$=\underbrace{2+2+2+2+2}_{2\text{가 }5\text{개}}+1$

따라서 구하는 분할의 개수는 12이다.

106 구하는 방법의 수는 9를 4개의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다.

$9=6+1+1+1=5+2+1+1=4+3+1+1$

$=4+2+2+1=3+3+2+1=3+2+2+2$

$\therefore\ P(9,\ 4)=6$

107 구하는 방법의 수는 7을 3개 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수와 같다.

$7=6+1=5+2=4+3$

$=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$

$\therefore\ P(7,\ 1)+P(7,\ 2)+P(7,\ 3)=1+3+4=8$

참고 빈 접시가 0개, 1개, 2개인 방법의 수는 차례로 $P(7,\ 3),\ P(7,\ 2),\ P(7,\ 1)$이다.

1등급 비법

똑같은 공 n개를 똑같은 상자 k개에 나누어 담을 때,

① 빈 상자가 없도록 나누어 담는 방법의 수 ➡ $P(n,\ k)$

② 빈 상자가 있어도 되는 방법의 수

➡ $P(n,\ 1)+P(n,\ 2)+\cdots+P(n,\ k)$

108 $(x-3y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}(-3y)^r={}_5C_r(-3)^r x^{5-r}y^r$

x^4y항은 $r=1$일 때이므로 x^4y의 계수는

${}_5C_1\cdot(-3)=-15$

109 $\left(ax-\dfrac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(ax)^{4-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_4C_r a^{4-r}(-1)^r x^{4-2r}$ …… ㉮

상수항은 $4-2r=0$일 때이므로 $r=2$

이때 상수항이 54이므로

${}_4C_2 a^2(-1)^2=54,\ a^2=9$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$ …… ㉯

$\dfrac{1}{x^2}$항은 $4-2r=-2$일 때이므로 $r=3$

따라서 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수는 ${}_4C_3\cdot3\cdot(-1)^3=-12$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 전개식의 일반항 구하기	30%
㉯ a의 값 구하기	30%
㉰ $\dfrac{1}{x^2}$의 계수 구하기	40%

해(001~027)일등확통-01~03강ok.indd 15 14. 10. 10. 오후 3:33

110 $(x+a)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_r x^{5-r}a^r$
x^3항은 $r=2$일 때이므로 x^3의 계수는 ${}_5C_2 a^2=10a^2$
x^4항은 $r=1$일 때이므로 x^4의 계수는 ${}_5C_1 a=5a$
x^3의 계수와 x^4의 계수가 같으므로
$10a^2=5a \qquad \therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$
$\therefore 60a=60\cdot\frac{1}{2}=30$

111 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4C_r x^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r x^{4-2r}$ ...... ㉠
이때 $(2x^2+3x+4)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항은
$2x^2$과 ㉠의 $\frac{1}{x^2}$항, $3x$와 ㉠의 $\frac{1}{x}$항, 4와 ㉠의 상수항
이 곱해질 때 나타난다.
(i) ㉠의 $\frac{1}{x^2}$항은 $4-2r=-2$일 때이므로 $r=3$
$\therefore {}_4C_3 x^{-2}=\frac{4}{x^2}$
(ii) ㉠의 $\frac{1}{x}$항은 $4-2r=-1$일 때이므로 $r=\frac{5}{2}$
그런데 r는 $0\le r\le 4$인 정수이므로 $\frac{1}{x}$항은 존재하지 않는다.
(iii) ㉠의 상수항은 $4-2r=0$일 때이므로 $r=2$
$\therefore {}_4C_2=6$
이상에서 구하는 상수항은
$2x^2\cdot\frac{4}{x^2}+4\cdot 6=32$

112 $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{14}$ ...... ㉠
㉠은 첫째항이 $1+x$, 공비가 $1+x$, 항의 개수가 14인 등비수열의 합이므로
$\frac{(1+x)\{(1+x)^{14}-1\}}{(1+x)-1}=\frac{(1+x)^{15}-(1+x)}{x}$ ...... ㉡
...... ㉮
㉠의 전개식에서 x^6의 계수는 ㉡의 $(1+x)^{15}$의 전개식에서 x^7의 계수와 같다.
$(1+x)^{15}$의 전개식의 일반항은 ${}_{15}C_r x^r$
x^7항은 $r=7$일 때이므로 x^7의 계수는
${}_{15}C_7={}_{15}C_8$ ...... ㉯
따라서 $n+r$의 최댓값은
$15+8=23$ ...... ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 등비수열의 합을 이용하여 주어진 식 간단히 하기	30%
㉯ $(1+x)^{15}$의 전개식에서 x^7의 계수 구하기	40%
㉰ $n+r$의 최댓값 구하기	30%

113 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로
${}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=2^5=32$

114 ${}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$이므로
${}_{21}C_1+{}_{21}C_3+{}_{21}C_5+\cdots+{}_{21}C_{21}=2^{20}$
$\therefore \log_2({}_{21}C_1+{}_{21}C_3+{}_{21}C_5+\cdots+{}_{21}C_{21})$
$=\log_2 2^{20}=20$

115 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로
${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$ ...... ㉮
$500<{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n<1000$에서
$500<2^n-1<1000 \qquad \therefore 501<2^n<1001$ ...... ㉯
이때 $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로
$n=9$ ...... ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ ${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$을 간단히 하기	40%
㉯ 2^n의 값의 범위 구하기	30%
㉰ n의 값 구하기	30%

116 ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8$
$=({}_3C_0+{}_3C_1)+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8\ (\because {}_2C_0={}_3C_0=1)$
$=({}_4C_1+{}_4C_2)+\cdots+{}_{10}C_8$
$={}_5C_2+\cdots+{}_{10}C_8=\cdots$
$={}_{10}C_7+{}_{10}C_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

1등급 비법

파스칼의 삼각형에서
① 이항계수의 배열은 좌우 대칭이므로 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$
② 각 단계의 수는 그 윗단계의 이웃하는 두 수의 합과 같으므로
${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$

117 (i) ${}_nC_n=1$이므로
${}_1C_1+{}_2C_2+{}_3C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}=10$
(ii) ${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9$
$=({}_2C_0+{}_2C_1)+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9\ (\because {}_1C_0={}_2C_0=1)$
$=({}_3C_1+{}_3C_2)+\cdots+{}_{10}C_9$
$={}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_9=\cdots$
$={}_{10}C_8+{}_{10}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$
(i), (ii)에서 색칠한 부분의 모든 수의 합은
$10+55=65$

내신 완성 1등급문제 pp. 37~39

118 ②	**119** 380	**120** ④	**121** 56	**122** 19
123 ①	**124** ③	**125** 221	**126** ④	**127** ②
128 ②	**129** 12			

118 조합의 수

전략 모든 경우의 수에서 남학생만 뽑는 경우의 수와 여학생만 뽑는 경우의 수를 빼다.

풀이 전체 13명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{13}C_3=286$
남학생만 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_9C_3=84$
여학생만 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_4C_3=4$
따라서 구하는 방법의 수는 $286-(84+4)=198$

119 **조합의 수**

전략 다섯 자리 자연수이면서 7끼리는 이웃하지 않으려면 7은 최대 3개까지 포함할 수 있다.

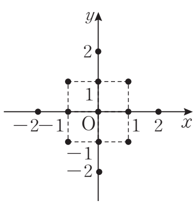
풀이 다섯 자리 자연수를 만들 때, 7을 2개 이상 포함하고 7끼리는 이웃하지 않도록 하려면 7은 2개 또는 3개이어야 한다.
(i) 7이 2개인 경우
∨□∨□∨□∨ 꼴에서 □의 자리에는 1, 2, 3, 5, 9의 5개의 숫자에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하고, 나머지 네 개의 ∨의 자리에서 2개를 택하여 7을 배열하면 되므로
${}_5P_3\cdot{}_4C_2=60\cdot 6=360$ …… ㉮
(ii) 7이 3개인 경우
7□7□7 꼴에서 □의 자리에 1, 2, 3, 5, 9의 5개의 숫자에서 2개를 뽑아 일렬로 나열하면 되므로
${}_5P_2=20$ …… ㉯
(i), (ii)에서 구하는 다섯 자리 자연수의 개수는
$360+20=380$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 7이 2개인 경우의 자연수의 개수 구하기	40%
㉯ 7이 3개인 경우의 자연수의 개수 구하기	40%
㉰ 다섯 자리 자연수의 개수 구하기	20%

120 **조합의 수 ; 도형의 개수**

전략 주어진 조건을 만족시키는 점 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내고, 사각형을 만들 수 없는 경우를 제외한다.

풀이 조건 ㈎, ㈏를 모두 만족시키는 점 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



13개의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는 ${}_{13}C_4=715$
(i) 한 직선 위에 있는 3개의 점과 다른 한 점을 택할 때,
한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 10개, 한 직선 위에 5개의 점이 있는 직선은 2개이므로
${}_3C_3\cdot{}_{10}C_1\cdot 10+{}_5C_3\cdot{}_8C_1\cdot 2=260$
(ii) 한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 4개를 택할 때,
한 직선 위에 5개의 점이 있는 직선은 2개이므로
${}_5C_4\cdot 2=10$
그런데 한 직선 위에 있는 3개의 점과 다른 한 점 또는 한 직선 위에 있는 4개의 점으로는 사각형을 만들 수 없으므로 구하는 사각형의 개수는 $715-(260+10)=445$

121 **중복조합**

전략 중복조합의 수를 이용한다.

풀이 규칙 ㈏, ㈐에 의하여 6종류의 원판 중에서 중복을 허용하여 3개의 원판을 택하면 쌓는 방법은 한 가지로 정해진다.
따라서 구하는 방법의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_6H_3={}_8C_3=56$

122 **중복조합 ; 정수해의 개수**

전략 $z=1$, $z=2$, $z=3$일 때로 나누어 주어진 방정식을 만족시키는 양의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구한다.

풀이 (i) $z=1$일 때, $z^2=1$이므로 주어진 방정식은
$x+y+1=12$ $\quad\therefore x+y=11$
이때 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는 서로 다른 2개의 문자에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_9={}_{10}C_9={}_{10}C_1=10$ …… ㉮
(ii) $z=2$일 때, $z^2=4$이므로 주어진 방정식은
$x+y+4=12$ $\quad\therefore x+y=8$
이때 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는 서로 다른 2개의 문자에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$ …… ㉯
(iii) $z=3$일 때, $z^2=9$이므로 주어진 방정식은
$x+y+9=12$ $\quad\therefore x+y=3$
이때 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는 서로 다른 2개의 문자에서 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_1={}_2C_1=2$ …… ㉰
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$10+7+2=19$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ $z=1$일 때, 순서쌍 (x, y)의 개수 구하기	30%
㉯ $z=2$일 때, 순서쌍 (x, y)의 개수 구하기	30%
㉰ $z=3$일 때, 순서쌍 (x, y)의 개수 구하기	30%
㉱ 순서쌍 (x, y, z)의 개수 구하기	10%

123 **집합의 분할**

전략 각 조의 인원이 2명 이상이어야 하므로 (2명, 6명), (3명, 5명), (4명, 4명)으로 나누어 구한다.

풀이 (i) 2명, 6명으로 나눌 때,
선생님 1명, 학생 1명을 2명인 조에 배정하는 방법의 수는
$({}_4C_1\cdot{}_4C_1)\cdot{}_6C_6=16$
(ii) 3명, 5명으로 나눌 때,
선생님 1명, 학생 2명을 3명인 조에 배정하는 방법의 수는
$({}_4C_1\cdot{}_4C_2)\cdot{}_5C_5=24$
선생님 2명, 학생 1명을 3명인 조에 배정하는 방법의 수는
$({}_4C_2\cdot{}_4C_1)\cdot{}_5C_5=24$
이므로 $24+24=48$
(iii) 4명, 4명으로 나눌 때,
선생님 1명, 학생 3명을 한 조에 배정하는 방법의 수는

02 조합

$({}_4C_1 \cdot {}_4C_3) \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!}=8$

선생님 2명, 학생 2명을 한 조에 배정하는 방법의 수는

$({}_4C_2 \cdot {}_4C_2) \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!}=18$

선생님 3명, 학생 1명을 한 조에 배정하는 방법의 수는

$({}_4C_3 \cdot {}_4C_1) \cdot {}_4C_4 \cdot \frac{1}{2!}=8$

이므로 $8+18+8=34$

이상에서 구하는 방법의 수는 $16+48+34=98$

124 자연수의 분할

전략 구슬을 각 상자에 1개씩 넣은 후, 나머지 구슬을 나누어 담는 방법을 생각한다.

풀이 구슬을 각 상자에 1개씩 넣은 후, 남은 7개의 구슬을 3개의 상자에 빈 상자가 없도록 나누어 담으면 된다.

이때 $7=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$이므로 구하는 방법의 수는 $P(7,\ 3)=4$

다른풀이 각 상자에 구슬을 2개씩 넣은 후, 남은 4개의 구슬을 3개 이하의 상자에 넣으면 된다.

이때 $4=3+1=2+2=2+1+1$이므로 구하는 방법의 수는

$P(4,\ 1)+P(4,\ 2)+P(4,\ 3)=1+2+1=4$

125 이항정리

전략 $21^{11}=(1+20)^{11}$이므로 이항정리를 이용한다.

풀이 $21^{11}=(1+20)^{11}$

$={}_{11}C_0+{}_{11}C_1 \cdot 20+{}_{11}C_2 \cdot 20^2+\cdots+{}_{11}C_{11} \cdot 20^{11}$

$={}_{11}C_0+{}_{11}C_1 \cdot 20$

$+20^2({}_{11}C_2+{}_{11}C_3 \cdot 20+\cdots+{}_{11}C_{11} \cdot 20^9)$ …… ㉮

이때 $20^2({}_{11}C_2+{}_{11}C_3 \cdot 20+\cdots+{}_{11}C_{11} \cdot 20^9)$은 400으로 나누어 떨어지므로 21^{11}을 400으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{11}C_0+{}_{11}C_1 \cdot 20$을 400으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1 \cdot 20=1+220=221$

따라서 구하는 나머지는 221이다. …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 이항정리를 이용하여 $21^{11}=(1+20)^{11}$을 전개하기	40%
㉯ ㉮의 전개식에서 400으로 나누어 떨어지는 항을 찾고, 21^{11}을 400으로 나누었을 때의 나머지 구하기	60%

126 이항정리

전략 $(1+i)^{16}$을 전개한 후, 복소수의 성질을 이용한다.

풀이 $(1+i)^{16}={}_{16}C_0+{}_{16}C_1 i+{}_{16}C_2 i^2+{}_{16}C_3 i^3+{}_{16}C_4 i^4$

$+\cdots+{}_{16}C_{16} i^{16}$

에서 $i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i$이므로

$(1+i)^{16}=({}_{16}C_0-{}_{16}C_2+{}_{16}C_4-{}_{16}C_6+\cdots+{}_{16}C_{16})$

$+i({}_{16}C_1-{}_{16}C_3+{}_{16}C_5-\cdots-{}_{16}C_{15})$

이때 $(1+i)^{16}=\{(1+i)^2\}^8=(2i)^8=2^8=256$이고,

${}_{16}C_1={}_{16}C_{15},\ {}_{16}C_3={}_{16}C_{13},\ {}_{16}C_5={}_{16}C_{11},\ {}_{16}C_7={}_{16}C_9$이므로

${}_{16}C_1-{}_{16}C_3+{}_{16}C_5-\cdots-{}_{16}C_{15}=0$

$\therefore\ {}_{16}C_0-{}_{16}C_2+{}_{16}C_4-{}_{16}C_6+\cdots+{}_{16}C_{16}=256$

127 이항계수의 성질

전략 원소의 개수가 2, 4, 6, 8, 10인 부분집합의 개수를 각각 조합의 수로 나타낸다.

풀이 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 1, 2, 3, …, 10의 10개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{10}C_2$

같은 방법으로 원소의 개수가 4, 6, 8, 10인 부분집합의 개수는 각각 ${}_{10}C_4,\ {}_{10}C_6,\ {}_{10}C_8,\ {}_{10}C_{10}$

따라서 구하는 집합의 개수는

${}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}=2^9-1=511$

1등급 비법

n이 짝수일 때, ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$이므로

${}_nC_2+{}_nC_4+{}_nC_6+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}-{}_nC_0=2^{n-1}-1$

128 조합의 수 ; 함수의 개수

1단계 $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)<f(5)$인 함수 f의 개수를 구한다.

$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)<f(5)$인 함수 f의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개 중에서 5개를 뽑는 방법의 수와 같으므로 ${}_6C_5={}_6C_1=6$

2단계 $f(1)=f(2)<f(3)<f(4)<f(5)$ 또는 $f(1)<f(2)<f(3)=f(4)<f(5)$인 함수 f의 개수를 구한다.

$f(1)=f(2)<f(3)<f(4)<f(5)$ 또는

$f(1)<f(2)<f(3)=f(4)<f(5)$인 함수 f의 개수는

Y의 원소 6개 중에서 4개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

$2 \cdot {}_6C_4=2 \cdot {}_6C_2=30$

3단계 $f(1)=f(2)<f(3)=f(4)<f(5)$인 함수 f의 개수를 구한다.

$f(1)=f(2)<f(3)=f(4)<f(5)$인 함수 f의 개수는 Y의 원소 6개 중에서 3개를 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_6C_3=20$

4단계 $f(1)\le f(2)<f(3)\le f(4)<f(5)$를 만족시키는 함수 f의 개수를 구한다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$6+30+20=56$

129 이항정리

1단계 $a(x+4)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수를 구한다.

$a(x+4)^n$의 전개식의 일반항은

$a\,{}_nC_r x^{n-r}4^r=a\,{}_nC_r 4^r x^{n-r}$

x^{n-1}항은 $n-r=n-1$일 때이므로 $r=1$

따라서 x^{n-1}의 계수는

$a\,{}_nC_1 \cdot 4=4an$

2단계 $(x-1)(x-a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수를 구한다.

$(x-a)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r x^{n-r}(-a)^r={}_nC_r(-1)^r a^r x^{n-r}$ …… ㉠

이때 $(x-1)(x-a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}항은

x와 ㉠의 x^{n-2}항, -1과 ㉠의 x^{n-1}항이 곱해질 때 나타난다.

(i) ㉠의 x^{n-2}항은 $n-r=n-2$일 때이므로 $r=2$

$\therefore\ {}_nC_2(-1)^2a^2x^{n-2}=\frac{a^2n(n-1)}{2}x^{n-2}$

(ii) ㉠의 x^{n-1}항은 $n-r=n-1$일 때이므로 $r=1$

$\therefore\ {}_nC_1\cdot(-1)ax^{n-1}=-anx^{n-1}$

(i), (ii)에서 x^{n-1}항은

$x\cdot\dfrac{a^2n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}+(-1)\cdot(-anx^{n-1})$

$=\left\{\dfrac{a^2n(n-1)}{2}+an\right\}x^{n-1}$

이므로 x^{n-1}의 계수는 $\dfrac{a^2n(n-1)}{2}+an$

3단계 두 계수가 같게 되는 모든 순서쌍 (a, n)에 대하여 an의 최댓값을 구한다.

$4an=\dfrac{a^2n(n-1)}{2}+an$에서

$8an=a^2n(n-1)+2an,\ n(n-1)a^2-6an=0$

$a(n-1)-6=0$ ($\because$ a, n은 자연수)

$\therefore\ a(n-1)=6$

a, n이 될 수 있는 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

$n-1$	1	2	3	6
a	6	3	2	1

, 즉

n	2	3	4	7
a	6	3	2	1

따라서 an의 최댓값은 $a=6$, $n=2$일 때,

$6\cdot2=12$

I. 순열과 조합

실전 대비 I단원 평가문제

pp. 40~41

130 ⑤	**131** 363	**132** ④	**133** ②	**134** 10
135 15	**136** ④	**137** ⑤		

130 원순열

전략 윗면과 아랫면을 칠하는 방법의 수를 구하고, 원순열을 이용하여 옆면을 칠하는 방법의 수를 구한 후 곱한다.

풀이 사각뿔대의 윗면과 아랫면을 칠하는 방법의 수는

${}_6P_2=30$

윗면과 아랫면에 칠한 색을 제외한 4가지 색을 사용하여 옆면을 칠하는 방법의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$30\cdot6=180$

131 중복순열

전략 중복순열을 이용하여 a_n을 구한 후, 등비수열의 합을 이용한다.

풀이 a_n은 3가지 색의 깃발 중 n개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$a_n={}_3\Pi_n=3^n$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}3^n=\dfrac{3(3^5-1)}{3-1}=363$

132 같은 것이 있는 순열

전략 7개의 케이크 중 4개를 택하는 경우를 모두 구하고, 같은 것이 있는 순열을 이용하여 각각의 경우의 수를 구한다.

풀이 3가지 종류의 케이크를 각각 a, b, c라 하면 a, a, b, b, b, c, c의 7개 중에서 4개를 택하는 경우는

$aabb$, $aabc$, $aacc$, $abbb$, $abbc$, $abcc$, $bbcc$, $bbbc$

이고 각 경우의 케이크 세트의 개수는

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$, $\dfrac{4!}{2!}=12$, $\dfrac{4!}{2!2!}=6$, $\dfrac{4!}{3!}=4$,

$\dfrac{4!}{2!}=12$, $\dfrac{4!}{2!}=12$, $\dfrac{4!}{2!2!}=6$, $\dfrac{4!}{3!}=4$

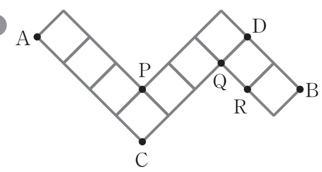
따라서 구하는 케이크 세트의 개수는

$4\cdot2+6\cdot3+12\cdot3=62$

133 같은 것이 있는 순열

전략 C 지점과 D 지점을 지나지 않으면서 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 갈 때, 반드시 지나야 하는 점을 찾아 같은 것이 있는 순열을 이용한다.

풀이



위의 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 C 지점과 D 지점을 지나지 않고 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법은 A → P → Q → R → B이므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}\cdot\dfrac{3!}{2!}\cdot1\cdot2!=24$

134 중복조합

전략 공역의 두 원소의 합이 10이 되는 경우를 구하고, 중복조합의 수를 이용한다.

풀이 조건 ㈎에서 공역의 두 원소의 합이 10이 되는 경우는

$3+7=4+6=5+5=10$

이므로 이를 순서쌍으로 나타내면 $(3, 7)$, $(4, 6)$, $(5, 5)$이다.

이때 함수 f는 3개의 순서쌍 중 중복을 허용하여 3개를 택한 후, 조건 ㈏를 만족시키도록 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

135 중복조합 ; 정수해의 개수

전략 노란 장미, 분홍 장미, 빨간 장미의 개수를 각각 x, y, z라 하고 $x+y+z=10$에서 조건을 만족시키는 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구한다.

풀이 노란 장미, 분홍 장미, 빨간 장미의 개수를 각각 x, y, z라 하면 $x+y+z=10$

이때 $x\geq3$, $y\geq2$, $z\geq1$이므로

$x=X+3$, $y=Y+2$, $z=Z+1$로 놓고 $x+y+z=10$에 대입하면

$(X+3)+(Y+2)+(Z+1)=10$

$\therefore\ X+Y+Z=4$

따라서 서로 다른 3개의 문자에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

136 집합의 분할

전략 6명을 2개의 조로 나누어 3개의 정류장 A, B, C 중에서 2개의 정류장에 분배한다.

풀이 3개의 정류장 A, B, C 중에서 승객이 내리는 2개의 정류장을 택하는 방법의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=3$

6명의 승객을 2개의 조로 나눌 때, 각 조의 인원 수는 (1명, 5명) 또는 (2명, 4명) 또는 (3명, 3명)

(i) 승객을 1명, 5명으로 나누는 방법의 수는

${}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_5=6$

(ii) 승객을 2명, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_4=15$

(iii) 승객을 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

${}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_3\cdot\dfrac{1}{2!}=10$

이상에서 승객을 2개의 조로 나누는 방법의 수는

$6+15+10=31$

2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$3\cdot31\cdot2=186$

1등급 비법

6명의 승객을 2개의 조로 나누어 2개의 정류장에 분배해야 하므로 승객을 나누는 방법의 수에 정류장에 분배하는 방법의 수를 반드시 곱해야 한다.

137 이항정리

전략 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{n+1}$의 전개식의 일반항을 이용하여 x^{n-3}의 계수를 구한다.

풀이 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{n+1}$의 전개식의 일반항은

${}_{n+1}\mathrm{C}_r x^{n+1-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_{n+1}\mathrm{C}_r x^{n+1-2r}$

x^{n-3}항은 $n+1-2r=n-3$일 때이므로 $r=2$

따라서 x^{n-3}의 계수는 ${}_{n+1}\mathrm{C}_2=\dfrac{(n+1)n}{2}$이므로

$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

II 확률

03 확률의 뜻과 활용

교과서에서 뽑은 기본 문제 pp. 44~45

138 (1) $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (2) $A=\{1, 3, 5\}$ (3) $B=\{1, 5\}$

139 $\dfrac{1}{6}$ **140** $\dfrac{453}{500}$ **141** (1) 0 (2) 1

142 (1) $\dfrac{12}{25}$ (2) $\dfrac{6}{25}$ **143** $\dfrac{7}{8}$

138 (1) $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) 홀수는 1, 3, 5이므로 $A=\{1, 3, 5\}$

(3) 5의 약수는 1, 5이므로 $B=\{1, 5\}$

139 두 눈의 수의 합이 7이 되는 경우는

(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)

의 6가지이므로 구하는 확률은

$\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

140 1000명 중에서 항체가 생긴 사람이 906명이므로 어떤 사람에게 이 예방접종을 하였을 때, 항체가 생길 확률은

$\dfrac{906}{1000}=\dfrac{453}{500}$

141 (1) 검은 공은 2개이므로 검은 공이 3개 나오는 사건은 절대로 일어날 수 없다.

따라서 구하는 확률은 0이다.

(2) 검은 공이 2개이므로 3개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 1개 이상 나오는 사건은 반드시 일어난다.

따라서 구하는 확률은 1이다.

142 (1) 카드에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 4의 배수인 사건을 B라 하면 카드에 적힌 수가 3의 배수 또는 4의 배수인 사건은 $A\cup B$, 3의 배수이면서 4의 배수, 즉 12의 배수인 사건은 $A\cap B$이다.

$n(A)=16$, $n(B)=12$, $n(A\cap B)=4$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{16}{50}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{12}{50}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{4}{50}$

따라서 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{16}{50}+\frac{12}{50}-\frac{4}{50}=\frac{12}{25}$$

(2) 카드에 적힌 수가 7의 배수인 사건을 A, 9의 배수인 사건을 B라 하면 카드에 적힌 수가 7의 배수 또는 9의 배수인 사건은 $A\cup B$이다.

$n(A)=7$, $n(B)=5$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{7}{50}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{50}$

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{7}{50}+\frac{5}{50}=\frac{6}{25}$$

143 앞면이 적어도 한 번 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 세 번 모두 뒷면이 나오는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

내신 붙여 기출문제 pp. 46~52

144 ④	**145** ②	**146** 4	**147** ③	**148** 61
149 $\frac{5}{12}$	**150** ②	**151** ②	**152** ③	**153** 12
154 $\frac{4}{7}$	**155** ④	**156** ⑤	**157** ①	**158** ②
159 ②	**160** ④	**161** $\frac{1}{4}$	**162** ⑤	**163** ③
164 ②	**165** ③	**166** $\frac{15}{64}$	**167** ③	
168 (1) $\frac{1}{220}$	(2) $\frac{1}{55}$	(3) $\frac{1}{22}$	(4) $\frac{3}{44}$	
169 ②	**170** ③	**171** ②	**172** ③	**173** $\frac{4}{5}$
174 ④	**175** 0.1			

144 ① 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A=\{2, 4\}$, $B=\{2, 3, 5\}$

② $B^C=\{1, 4\}$

③ $A\cup B=\{2, 3, 4, 5\}$

⑤ $A^C=\{1, 3, 5\}$

따라서 옳은 것은 ④이다.

145 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{1, 3\}$, $D=\{3, 6\}$이므로

$A\cap B=\{2\}$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\{3\}$

$B\cap D=\{3\}$, $C\cap D=\{3\}$

따라서 사건 A와 사건 C는 서로 배반사건이다.

146 1부터 n까지의 자연수가 각각 적힌 정n면체 3개를 던지는 시행에서 모든 경우의 수는 n^3이고, 동전 1개를 던지는 시행에서 모든 경우의 수는 2이다. …… ㉮

이때 표본공간의 원소의 개수가 128이므로

$2n^3=128$ …… ㉯

$n^3=64$ $\therefore n=4$ ($\because$ n은 자연수) …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 두 시행에서 모든 경우의 수 각각 구하기	40%
㉯ n에 대한 식 세우기	30%
㉰ n의 값 구하기	30%

147 서로 다른 세 개의 동전을 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$2\cdot2\cdot2=8$

앞면이 2개인 경우는

(앞면, 앞면, 뒷면), (앞면, 뒷면, 앞면), (뒷면, 앞면, 앞면)의 3가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{8}$

148 4장의 카드에서 2장을 뽑는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$이고, 이 중에서 '한'과 '국'이 적힌 카드를 뽑는 방법의 수는 1이다.

따라서 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 $p=6$, $q=1$

$\therefore 10p+q=10\cdot6+1=61$

149 한 개의 주사위를 2번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6=36$ …… ㉮

(i) 두 눈의 수의 합이 8인 경우

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 9인 경우

(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지

(iii) 두 눈의 수의 합이 10인 경우

(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

(iv) 두 눈의 수의 합이 11인 경우

(5, 6), (6, 5)의 2가지

(v) 두 눈의 수의 합이 12인 경우

(6, 6)의 1가지

이상에서 두 눈의 수의 합이 8 이상인 경우의 수는

$5+4+3+2+1=15$ …… ㉯

따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 모든 경우의 수 구하기	30%
㉯ 두 눈의 수의 합이 8 이상인 경우의 수 구하기	50%
㉰ 두 눈의 수의 합이 8 이상일 확률 구하기	20%

150 1부터 100까지의 자연수 중에서 6과 서로소인 수의 개수는

100−{(2의 배수의 개수)+(3의 배수의 개수)
−(6의 배수의 개수)}

$=100-(50+33-16)=33$

따라서 구하는 확률은 $\frac{33}{100}$

151 5개의 알파벳 a, b, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

a, b를 양 끝에 배정하고 c, d, e를 그 사이에 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!\cdot3!=2\cdot6=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

152 A, B, C, D, E의 5명 중 2명의 대표를 뽑는 방법의 수는

${}_5C_2=10$

B가 대표로 뽑히는 방법의 수는 B를 제외한 나머지 4명 중 1명을 뽑는 방법의 수와 같으므로 ${}_4C_1=4$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

1등급 비법

서로 다른 n개에서 특정한 k개를 포함하여 r개를 뽑는 방법의 수는 $(n-k)$개에서 $(r-k)$개를 뽑는 방법의 수와 같으므로 ${}_{n-k}C_{r-k}$이다.

153 김치 2종류와 나물 4종류 중에서 임의로 3종류의 반찬을 선택하는 방법의 수는

${}_6C_3=20$ …… ㉮

김치 1종류와 나물 2종류를 선택하는 방법의 수는

${}_2C_1\cdot{}_4C_2=2\cdot6=12$ …… ㉯

따라서 $p=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$이므로

$20p=20\cdot\frac{3}{5}=12$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 3종류의 반찬을 선택하는 방법의 수 구하기	30%
㉯ 김치 1종류와 나물 2종류를 선택하는 방법의 수 구하기	30%
㉰ $20p$의 값 구하기	40%

154 정육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 서로 다른 두 꼭짓점을 택하는 방법의 수는 ${}_8C_2=28$

이 중에서 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우는 $\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{3}$

(i) 선분의 길이가 $\sqrt{2}$인 경우의 수는

각 면의 대각선의 개수와 같으므로 $2\cdot6=12$

(ii) 선분의 길이가 $\sqrt{3}$인 경우의 수는

정육면체의 대각선의 개수와 같으므로 4

(i), (ii)에서 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우의 수는

$12+4=16$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$

155 전체 8명이 임의로 2명씩 짝을 짓는 방법의 수는

${}_8C_2\cdot{}_6C_2\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{4!}=105$

남학생은 남학생끼리, 여학생은 여학생끼리 2명씩 짝을 짓는 방법의 수는

${}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}\cdot{}_4C_2\cdot{}_2C_2\cdot\frac{1}{2!}=9$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{105}=\frac{3}{35}$

1등급 비법

서로 다른 n개를 p개, q개, r개, s개$(p+q+r+s=n)$로 분할하는 방법의 수는 p, q, r, s가 모두 같은 수일 때,

${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_q\cdot{}_{n-p-q}C_r\cdot{}_sC_s\cdot\frac{1}{4!}$

156 주사위 1개와 동전 5개를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot2^5=192$

$a=3b$인 경우는 $a=3$, $b=1$ 또는 $a=6$, $b=2$

(i) $a=3$, $b=1$인 경우의 수는

$1\cdot\frac{5!}{4!}=1\cdot5=5$

(ii) $a=6$, $b=2$인 경우의 수는

$1\cdot\frac{5!}{2!3!}=1\cdot10=10$

(i), (ii)에서 $a=3b$인 경우의 수는 $5+10=15$

따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{192}=\frac{5}{64}$

157 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot6\cdot6=216$

한 주사위의 눈의 수가 다른 두 개의 주사위의 눈의 수의 곱이 되는 경우는

(1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 3), (1, 4, 4), (1, 5, 5), (1, 6, 6), (2, 2, 4), (2, 3, 6)

(i) (1, 1, 1)인 경우의 수는 1

(ii) (1, 2, 2), (1, 3, 3), (1, 4, 4), (1, 5, 5), (1, 6, 6), (2, 2, 4)인 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\cdot6=3\cdot6=18$

(iii) (2, 3, 6)인 경우의 수는 $3!=6$

이상에서 한 주사위의 눈의 수가 다른 두 개의 주사위의 눈의 수의 곱이 되는 경우의 수는 $1+18+6=25$

따라서 구하는 확률은 $\frac{25}{216}$

158 씨앗이 싹이 틀 확률은

$\frac{925}{1200}=\frac{37}{48}$

따라서 $a=37$, $b=48$이므로 $a+b=85$

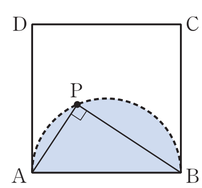
159 3단계까지 통과한 사람은 65520명이고 5단계까지 통과한 사람은 15600명이므로

$p=\frac{15600}{65520}=\frac{5}{21}$

$\therefore\ 42p=42\cdot\frac{5}{21}=10$

160 점 P가 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때, △APB는 직각삼각형이 된다.

따라서 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 △APB가 둔각삼각형

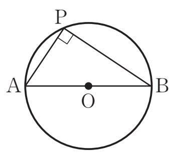


이 되므로 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{ABCD의 넓이})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot1^2}{4}=\frac{\pi}{8}$$

1등급 비법

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 원의 지름의 양 끝점과 다른 한 점을 택하면 직각삼각형을 만들 수 있다.

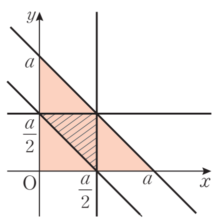


161 세 선분의 길이를 각각 x, y, $a-x-y$라 하면

$0<x<a$, $0<y<a$, $0<a-x-y<a$

$\therefore$ $0<x<a$, $0<y<a$, $0<x+y<a$ …… ㉠ …… ㉮

㉠을 모두 만족시키는 부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다. (단, 경계선 제외)



이때 세 선분이 삼각형의 세 변이 되려면

$x+y>a-x-y$,

$x+(a-x-y)>y$, $y+(a-x-y)>x$

$\therefore$ $x+y>\frac{a}{2}$, $y<\frac{a}{2}$, $x<\frac{a}{2}$ …… ㉡

㉡을 모두 만족시키는 부등식의 영역은 위의 그림의 빗금친 부분과 같다. (단, 경계선 제외) …… ㉯

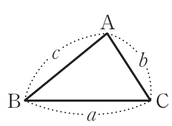
따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{빗금친 부분의 넓이})}{(\text{색칠한 부분의 넓이})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}\cdot a\cdot a}=\frac{1}{4}$$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 세 선분의 길이의 범위 구하기	30%
㉯ 세 선분이 삼각형의 세 변이 될 조건 구하기	40%
㉰ 세 선분이 삼각형의 세 변이 될 확률 구하기	30%

1등급 비법

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.
즉, 오른쪽 그림의 △ABC에서
$a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$



162 표본공간 $S=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$에서 홀수는 존재하지 않으므로 $\mathrm{P}(A)=0$

또, 집합 S의 모든 원소는 2의 배수이므로

$\mathrm{P}(B)=1$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$

163 ㄱ. 확률의 기본 성질에 의하여

$0\le\mathrm{P}(A)\le1$

ㄴ. $0\le\mathrm{P}(A)\le1$, $0\le\mathrm{P}(B)\le1$이므로

$0\le\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le2$

ㄷ. $\varnothing\subset(A\cup B)\subset S$이므로

$\mathrm{P}(\varnothing)\le\mathrm{P}(A\cup B)\le\mathrm{P}(S)$

$\therefore$ $0\le\mathrm{P}(A\cup B)\le1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

164 두 사건 A, B가 서로 배반이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{3}{5}=\frac{1}{4}+\mathrm{P}(B)$

$\therefore$ $\mathrm{P}(B)=\frac{7}{20}$

165 7이 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, 15가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{14}\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{14}{105}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_{14}\mathrm{C}_1}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\frac{14}{105}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{105}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{14}{105}+\frac{14}{105}-\frac{1}{105}=\frac{9}{35}$

1등급 비법

$\mathrm{P}(A)$는 7이 적힌 카드를 제외한 14장의 카드에서 1장을 뽑을 확률과 같고, $\mathrm{P}(B)$는 15가 적힌 카드를 제외한 14장의 카드에서 1장을 뽑을 확률과 같다.

166 $f(3)=5$인 사건을 A, $f(5)=7$인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_8\Pi_4}{{}_8\Pi_5}=\frac{8^4}{8^5}=\frac{1}{8}$ …… ㉮

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_8\Pi_4}{{}_8\Pi_5}=\frac{8^4}{8^5}=\frac{1}{8}$ …… ㉯

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_8\Pi_3}{{}_8\Pi_5}=\frac{8^3}{8^5}=\frac{1}{64}$ …… ㉰

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{64}=\frac{15}{64}$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ $f(3)=5$, $f(5)=7$인 사건을 각각 A, B라 하고 $\mathrm{P}(A)$의 값 구하기	30%
㉯ $\mathrm{P}(B)$의 값 구하기	30%
㉰ $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값 구하기	30%
㉱ $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값 구하기	10%

1등급 비법

① $f(3)=5$인 함수 f의 개수는 Y의 원소 8개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 X의 원소 1, 2, 4, 5에 대응시키는 방법의 수와 같다.
② $f(3)=5$, $f(5)=7$인 함수 f의 개수는 Y의 원소 8개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 X의 원소 1, 2, 4에 대응시키는 방법의 수와 같다.

167 꺼낸 공 2개가 모두 흰 공인 사건을 A, 모두 검은 공인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{10}$

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{10}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{1}{10}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{2}{5}$

168 (1) $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{220}$ …… ㉮

(2) $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\dfrac{4}{220}=\dfrac{1}{55}$ …… ㉯

(3) $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\dfrac{10}{220}=\dfrac{1}{22}$ …… ㉰

(4) 대표 3명이 모두 1학년인 사건을 A, 2학년인 사건을 B, 3학년인 사건을 C라 하면 세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$=\dfrac{1}{220}+\dfrac{1}{55}+\dfrac{1}{22}=\dfrac{3}{44}$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ 대표 3명이 모두 1학년일 확률 구하기	30%
㉯ 대표 3명이 모두 2학년일 확률 구하기	30%
㉰ 대표 3명이 모두 3학년일 확률 구하기	30%
㉱ 대표 3명이 모두 같은 학년일 확률 구하기	10%

169 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

170 적어도 한 개가 검은 공인 사건을 A라 하면 A^C는 4개가 모두 흰 공인 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{126}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{5}{126}=\dfrac{121}{126}$

171 두 눈의 수의 곱이 소수가 아닌 사건을 A라 하면 A^C는 두 눈의 수의 곱이 소수인 사건이므로

$A^C=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 5),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (5,\ 1)\}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

172 두 학생 A, B가 서로 이웃하지 않는 사건을 A라 하면 A^C는 A, B가 서로 이웃하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{4!\cdot 2!}{5!}=\dfrac{2}{5}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$

173 A, B 중 적어도 한 명이 기차를 타는 사건을 A라 하면 A^C는 A, B가 모두 버스를 타는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1}{\left({}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_3\cdot\dfrac{1}{2!}\right)\cdot 2!}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

1등급 비법

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{\text{(A, B를 제외한 4명 중 버스에 탈 1명을 뽑는 방법의 수)}}{\text{(6명을 세 명씩 두 조로 나누고 두 조를 기차와 버스에 배정하는 방법의 수)}}$

174 당첨 제비의 개수를 n, 적어도 1개의 당첨 제비를 뽑는 사건을 A라 하면 A^C는 3개 모두 당첨 제비를 뽑지 않는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_{9-n}\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\dfrac{(9-n)(8-n)(7-n)}{9\cdot 8\cdot 7}$

이때 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{20}{21}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\dfrac{20}{21}=\dfrac{1}{21}$

$\dfrac{(9-n)(8-n)(7-n)}{9\cdot 8\cdot 7}=\dfrac{1}{21}$에서

$(9-n)(8-n)(7-n)=24=4\cdot 3\cdot 2$

이므로 $9-n=4$ $\quad\therefore\ n=5$

따라서 당첨 제비의 개수는 5이다.

175 A가 문제를 맞히는 사건을 A, B가 문제를 맞히는 사건을 B라 하자.

두 명 중 한 명만 문제를 맞힐 확률이 0.6이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B)=0.6$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=0.3$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)-0.3=0.6$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=0.9$

A, B 모두 문제를 틀리는 사건은 $A^C\cap B^C$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-0.9=0.1$

내신 완성 1등급문제 pp. 53~55

176 ④	177 $\frac{1}{4}$	178 ④	179 ③	180 ④
181 21	182 $\frac{8}{45}$	183 ⑤	184 ④	185 $\frac{4}{9}$
186 ①	187 217	188 ③		

176 수학적 확률

전략 판별식을 이용하여 이차방정식이 실근을 가질 조건을 구한다.

풀이 이차방정식 $ax^2-8x+b=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-4)^2-ab\geq 0$, 즉 $ab\leq 16$이어야 한다.

주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot 6=36$

$ab\leq 16$인 경우는

(i) $a=1$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$의 6가지

(ii) $a=2$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5, 6$의 6가지

(iii) $a=3$일 때, $b=1, 2, 3, 4, 5$의 5가지

(iv) $a=4$일 때, $b=1, 2, 3, 4$의 4가지

(v) $a=5$일 때, $b=1, 2, 3$의 3가지

(vi) $a=6$일 때, $b=1, 2$의 2가지

이상에서 $ab\leq 16$인 경우의 수는

$6+6+5+4+3+2=26$

따라서 구하는 확률은 $\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$

177 수학적 확률

전략 두 수의 곱이 -1이 되는 경우를 생각한다.

풀이 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\cdot 6=36$ …… ㉮

$i^m\cdot(-1)^n=-1$인 경우는

$i^m=-1$, $(-1)^n=1$ 또는 $i^m=1$, $(-1)^n=-1$

(i) $i^m=-1$, $(-1)^n=1$인 경우

$m=2$ 또는 $m=6$이고 $n=2$ 또는 $n=4$ 또는 $n=6$이므로 순서쌍 (m, n)은

$(2, 2), (2, 4), (2, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)$의 6가지

(ii) $i^m=1$, $(-1)^n=-1$인 경우

$m=4$이고, $n=1$ 또는 $n=3$ 또는 $n=5$이므로 순서쌍 (m, n)은

$(4, 1), (4, 3), (4, 5)$의 3가지

(i), (ii)에서 $i^m\cdot(-1)^n=-1$인 경우의 수는

$6+3=9$ …… ㉯

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 모든 경우의 수 구하기	20%
㉯ $i^m\cdot(-1)^n=-1$인 경우의 수 구하기	60%
㉰ 확률 구하기	20%

1등급 비법

음이 아닌 정수 k에 대하여

$i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$

이므로 i^m에서 m이 2의 배수인 경우에 대해서 생각한다.

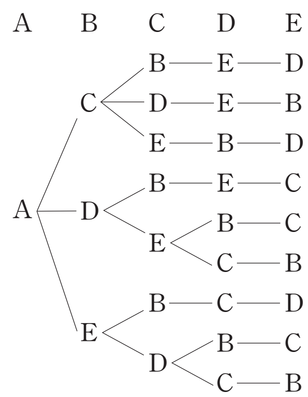
178 수학적 확률

전략 수형도를 이용하여 한 학생만 자신의 성적표를 선택하는 경우를 구한다.

풀이 5명의 학생이 5개의 성적표를 한 장씩 선택하는 모든 경우의 수는

$5!=120$

5명의 학생을 A, B, C, D, E라 하고 A학생만 자신의 성적표를 선택하고 나머지 네 학생은 다른 학생의 성적표를 선택하는 경우를 구해 보면 다음과 같이 9가지이다.



같은 방법으로 B, C, D, E학생이 각각 자신의 성적표를 선택하고 나머지 네 학생이 다른 학생의 성적표를 선택하는 경우도 각각 9가지씩이다.

따라서 한 사람만 자신의 성적표를 선택하는 경우의 수는

$9\cdot 5=45$이므로 구하는 확률은

$\frac{45}{120}=\frac{3}{8}$

1등급 비법

수형도를 이용하면 중복되지 않고 빠짐없이 모든 경우를 구할 수 있다.

179 수학적 확률

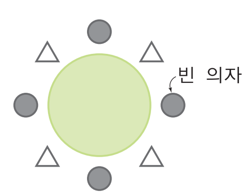
전략 어느 두 사람도 이웃하지 않으려면 먼저 빈 의자 4개를 놓고 그 사이사이에 세 사람이 앉으면 된다.

풀이 7개의 의자에 세 사람이 앉는 경우의 수는

한 사람이 임의의 한 의자에 앉고, 나머지 두 사람이 차례로 의자에 앉는 경우의 수와 같으므로

$1\cdot 6\cdot 5=30$

이때 세 사람 중 어느 두 사람도 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는 오른쪽 그림과 같이 빈 의자 4개 사이의 4개의 공간에 세 사람이 앉는 경우의 수와 같으므로



$1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

180 수학적 확률

전략 먼저 3학년 학생 3명을 일렬로 세운 후 같은 학년 학생끼리 서로 이웃하지 않도록 세우는 방법을 생각한다.

풀이 6명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $6! = 720$

(i) 3학년 학생 3명을 일렬로 세우고, 3학년 학생 사이사이에 2학년 학생 2명을 세운 후, 5명 사이사이와 양 끝에 1학년 학생 1명을 세우는 방법의 수는
$3! \cdot 2! \cdot {}_6C_1 = 6 \cdot 2 \cdot 6 = 72$

(ii) 3학년 학생 3명을 일렬로 세우고, 3학년 학생 사이사이에 2학년 학생 1명과 1학년 학생 1명을 세운 후, 5명의 양 끝에 2학년 학생 1명을 세우는 방법의 수는
$3! \cdot ({}_2C_1 \cdot 2!) \cdot {}_2C_1 = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$

(i), (ii)에서 같은 학년 학생끼리 이웃하지 않도록 세우는 방법의 수는 $72 + 48 = 120$

따라서 구하는 확률은 $\frac{120}{720} = \frac{1}{6}$

181 수학적 확률

전략 중복순열과 중복조합을 이용한다.

풀이 X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

주어진 조건을 만족시키는 함수 f는 Y의 원소 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후, 작은 수부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응시키면 된다.

이때 함수 f의 개수는 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{64} = \frac{5}{16}$이므로

$p = 16$, $q = 5$ $\quad \therefore p + q = 21$

182 확률의 덧셈정리

전략 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$임을 이용한다.

풀이 나온 수의 최솟값이 4인 사건을 A, 최댓값이 8인 사건을 B라 하면

$P(A) = \frac{{}_8C_3}{{}_{12}C_4} = \frac{56}{495}$ ...... ㉮

$P(B) = \frac{{}_7C_3}{{}_{12}C_4} = \frac{35}{495} = \frac{7}{99}$ ...... ㉯

$P(A \cap B) = \frac{{}_3C_2}{{}_{12}C_4} = \frac{3}{495} = \frac{1}{165}$ ...... ㉰

따라서 구하는 확률은

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{56}{495} + \frac{7}{99} - \frac{1}{165} = \frac{8}{45}$ ...... ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ 나온 수의 최솟값이 4일 확률 구하기	20%
㉯ 나온 수의 최댓값이 8일 확률 구하기	20%
㉰ 나온 수의 최솟값이 4이고, 최댓값이 8일 확률 구하기	20%
㉱ 나온 수의 최솟값이 4이거나 최댓값이 8일 확률 구하기	40%

1등급 비법

$P(A) = \frac{(\text{5부터 12까지의 8개에서 3개를 뽑는 방법의 수})}{(\text{1부터 12까지의 12개에서 4개를 뽑는 방법의 수})}$

$P(B) = \frac{(\text{1부터 7까지의 7개에서 3개를 뽑는 방법의 수})}{(\text{1부터 12까지의 12개에서 4개를 뽑는 방법의 수})}$

$P(A \cap B) = \frac{(\text{5, 6, 7의 3개에서 2개를 뽑는 방법의 수})}{(\text{1부터 12까지의 12개에서 4개를 뽑는 방법의 수})}$

183 확률의 덧셈정리

전략 세 수의 합이 짝수가 되는 경우를 구하고, 확률의 덧셈정리를 이용한다.

풀이 세 수의 합이 짝수가 되는 경우는

(홀수, 홀수, 짝수), (짝수, 짝수, 짝수)의 두 가지 경우이다.

홀수, 홀수, 짝수가 나오는 사건을 A,

짝수, 짝수, 짝수가 나오는 사건을 B라 하면

$P(A) = \frac{{}_5C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_9C_3} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$

$P(B) = \frac{{}_4C_3}{{}_9C_3} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{21} + \frac{1}{21} = \frac{11}{21}$

184 확률의 덧셈정리

전략 상자 A에서 빨간 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우와 검은 공 2개를 꺼낸 후 빨간 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) [실행 1]에 의하여 상자 B에 있는 빨간 공의 개수가 1인 경우

A에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_8C_2 = 28$

A에서 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_3C_1 \cdot {}_5C_1 = 15$

이므로 그 확률은 $\frac{15}{28}$

(ii) [실행 2]에 의하여 상자 B에 있는 빨간 공의 개수가 1인 경우

A에서 2개의 공을 꺼내고, 다시 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_8C_2 \cdot {}_6C_2 = 420$

A에서 검은 공 2개를 꺼내고, 다시 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_5C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_3C_1 = 90$

이므로 그 확률은 $\frac{90}{420} = \frac{3}{14}$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 $\frac{15}{28} + \frac{3}{14} = \frac{3}{4}$

185 여사건의 확률

전략 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$임을 이용한다.

풀이 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$

$\Longleftrightarrow a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

$\Longleftrightarrow a,\ b,\ c$ 중 적어도 2개의 수가 같다. …… ㉮

$a,\ b,\ c$ 중 적어도 2개의 수가 같은 사건을 A라 하면

A^C는 $a,\ b,\ c$가 모두 다른 수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_6\mathrm{P}_3}{6\cdot6\cdot6}=\dfrac{120}{216}=\dfrac{5}{9}$ …… ㉯

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{5}{9}=\dfrac{4}{9}$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 주어진 조건의 의미 파악하기	30%
㉯ 여사건의 확률 구하기	40%
㉰ 확률 구하기	30%

186 확률의 덧셈정리 ⊕ 여사건의 확률

전략 $\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$임을 이용한다.

풀이 적어도 한 명의 1학년 학생이 뽑히는 사건을 A,

적어도 한 명의 여학생이 뽑히는 사건을 B라 하면

A^C는 2명 모두 2학년이 뽑히는 사건이고

B^C는 2명 모두 남학생이 뽑히는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}=\dfrac{45}{120}=\dfrac{3}{8},\ \mathrm{P}(B^C)=\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{8}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$

이때 $A^C\cap B^C$는 2명 모두 2학년인 남학생이 뽑히는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}=\dfrac{15}{120}=\dfrac{1}{8}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$

$=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\dfrac{7}{8}=\dfrac{5}{8}+\dfrac{5}{8}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{8}$

187 수학적 확률

1단계 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 부분집합 중에서 서로 같은 집합을 포함하여 2개의 집합을 택하는 경우의 수를 구한다.

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 부분집합의 개수는

$2^4=16$

16개의 부분집합 중에서 서로 같은 집합을 포함하여 2개의 집합을 택하는 경우의 수는 16개 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{16}\mathrm{H}_2={}_{17}\mathrm{C}_2=136$

2단계 택한 2개의 부분집합 중 하나가 다른 하나의 부분집합인 경우의 수를 구한다.

둘 중 하나가 다른 하나의 부분집합인 경우는

(ⅰ) 둘 중 하나가 원소가 4개인 부분집합일 때,

다른 하나는 이 집합의 부분집합이므로 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_4\cdot2^4=16$

(ⅱ) 둘 중 하나가 원소가 3개인 부분집합일 때,

같은 방법으로 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3\cdot2^3=32$

(ⅲ) 둘 중 하나가 원소가 2개인 부분집합일 때,

같은 방법으로 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2\cdot2^2=24$

(ⅳ) 둘 중 하나가 원소가 1개인 부분집합일 때,

같은 방법으로 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1\cdot2^1=8$

(ⅴ) 둘 중 하나가 공집합일 때,

경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_0\cdot1=1$

이상에서 둘 중 하나가 다른 하나의 부분집합인 경우의 수는

$16+32+24+8+1=81$

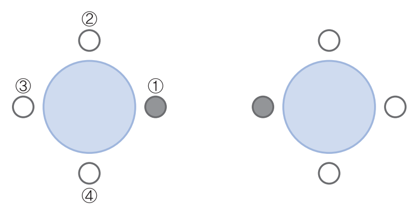
3단계 확률을 구하고, $p+q$의 값을 구한다.

따라서 둘 중 하나가 다른 하나의 부분집합일 확률은 $\dfrac{81}{136}$이므로 $p=136,\ q=81$

$\therefore\ p+q=217$

188 수학적 확률

1단계 8개의 의자에 앉는 방법의 수를 구한다.



두 개의 원형의 탁자가 서로 구별되지 않으므로 맨 처음 사람이 의자에 앉는 방법의 수는 4이고 나머지 7명이 차례로 의자에 앉는 방법의 수는 7!이다.

따라서 8개의 의자에 앉는 방법의 수는 $4\cdot7!$

2단계 어두운 의자에는 남자가 앉고, 부부끼리는 같은 원형의 탁자에서 마주 보도록 앉는 방법의 수를 구한다.

4명의 남자 중 2명을 택하여 어두운 의자에 앉히는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$이고, 부부끼리는 같은 원형의 탁자에서 마주 보고 앉으므로 남은 의자는 4개이다.

또, 남은 의자 중 하나의 의자에 나머지 4명 중 1명을 앉히는 방법의 수는 4이고 맞은편 의자는 채워지므로 남은 의자는 2개이다. 나머지 2명을 2개의 의자에 앉히는 방법의 수는 2!이다.

따라서 어두운 의자에는 남자가 앉고, 부부끼리는 같은 원형의 탁자에서 마주 보도록 앉는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2\cdot4\cdot2!$

3단계 $5!\cdot p$의 값을 구한다.

따라서 $p=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot4\cdot2!}{4\cdot7!}$이므로

$5!\cdot p=5!\cdot\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot4\cdot2!}{4\cdot7!}=\dfrac{2}{7}$

04 조건부확률

교과서에서 뽑은 기본 문제 p. 56

189 (1) $\frac{2}{5}$	(2) $\frac{3}{10}$	**190** (1) $\frac{1}{6}$	(2) $\frac{5}{6}$	(3) $\frac{1}{6}$	(4) $\frac{1}{3}$
191 $\frac{5}{16}$					

189 (1) $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{5}$

(2) $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{10}$

190 (1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(2) $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

(3) $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(4) $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

191 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 동전을 5번 던질 때, 앞면이 3번 나올 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\frac{1}{32}=\frac{5}{16}$

내신 분석 기출문제 pp. 57~63

192 ①	**193** $\frac{1}{4}$	**194** 1	**195** ①	**196** ③
197 $\frac{3}{5}$	**198** ④	**199** 10	**200** ②	**201** ③
202 ⑤	**203** $\frac{2}{5}$	**204** ②	**205** $\frac{3}{4}$	
206 (1) 0.32	(2) $\frac{3}{8}$	**207** ⑤	**208** 79	**209** ④
210 ②	**211** ④	**212** ⑤	**213** $\frac{1}{3}$	**214** ④
215 ⑤	**216** ④	**217** $\frac{16}{27}$	**218** ③	**219** ⑤
220 7	**221** $\frac{168}{625}$	**222** ①	**223** ③	

192 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\frac{9}{16}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{16}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{9}{16}}=\dfrac{1}{9}$

1등급 비법

사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어날 조건부확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이므로 주어진 조건을 이용하여 분모, 분자의 확률을 각각 구한다.

193 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A|B)}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{8}$ …… ㉮

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{5}{8}-\frac{1}{8}=\frac{5}{6}$ …… ㉯

$\therefore \mathrm{P}(B^C|A^C)=\dfrac{\mathrm{P}(B^C\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\dfrac{\mathrm{P}((A\cup B)^C)}{\mathrm{P}(A^C)}$

$=\dfrac{1-\mathrm{P}(A\cup B)}{1-\mathrm{P}(A)}=\dfrac{1-\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{4}$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $\mathrm{P}(B)$의 값 구하기	30%
㉯ $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값 구하기	30%
㉰ $\mathrm{P}(B^C|A^C)$의 값 구하기	40%

194 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{0.7}=\dfrac{10}{7}\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)$의 값이 최대일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값이 최대가 되고, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값이 최소일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값이 최소가 된다.

(i) $B\subset A$이면

$\mathrm{P}(A\cap B)$의 값이 최대이고,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)=0.5$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{10}{7}\times0.5=\frac{5}{7}$

$\therefore M=\frac{5}{7}$

(ii) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=1$이면

$\mathrm{P}(A\cap B)$의 값이 최소이고,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-1=0.7+0.5-1=0.2$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{10}{7}\times0.2=\frac{2}{7}$

$\therefore m=\frac{2}{7}$

(i), (ii)에서

$M+m=\frac{5}{7}+\frac{2}{7}=1$

195 $\mathrm{P}(A)=0.6$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.35$이므로 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.35}{0.6}=\frac{7}{12}$$

196 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

짝수의 눈 중에서 소수의 눈은 2뿐이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

197 상자에서 빨간 카드를 뽑는 사건을 A, 홀수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{9}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}$$

198 A 또는 B가 회장으로 뽑히는 사건을 M, F가 부회장으로 뽑히는 사건을 N이라 하면

$\mathrm{P}(M)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(M\cap N)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(N|M)=\frac{\mathrm{P}(M\cap N)}{\mathrm{P}(M)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}$$

199 갑과 을이 이웃하여 서 있는 사건을 A, 을과 병이 이웃하여 서 있는 사건을 B라 하면

갑, 을 두 명을 하나로 묶어서 생각하여 9명을 한 줄로 세우는 경우의 수는 $9!$이고, 갑과 을이 자리를 바꾸는 경우는 2가지이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{9!\cdot2}{10!}=\frac{1}{5}$ …… ㉮

갑, 을, 병 세 명을 하나로 묶어서 생각하여 8명을 한 줄로 세우는 경우의 수는 $8!$이고, 갑과 을이 이웃하면서 을과 병이 이웃하여 서는 경우는 2가지이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8!\cdot2}{10!}=\frac{1}{45}$ …… ㉯

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{45}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{9}$ …… ㉰

따라서 $p=9$, $q=1$이므로 $p+q=10$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ 갑과 을이 이웃하여 서 있는 사건을 A, 을과 병이 이웃하여 서 있는 사건을 B라 하고 $\mathrm{P}(A)$의 값 구하기	30%
㉯ $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값 구하기	30%
㉰ $\mathrm{P}(B\|A)$의 값 구하기	30%
㉱ $p+q$의 값 구하기	10%

200 첫 번째에 흰 공이 나오는 사건을 A, 두 번째에 검은 공이 나오는 사건을 B라 하면 첫 번째에 흰 공, 두 번째에 검은 공이 나올 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{7}$$

201 갑이 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 을이 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하면 갑이 당첨 제비를 뽑지 못하고 을만 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{9}{12}\cdot\frac{3}{11}=\frac{9}{44}$$

202 (i) B의 주사위에서 나온 눈의 수가 3인 경우

A의 주사위에서 나온 눈의 수가 2, C의 주사위에서 나온 눈의 수가 1일 때, B가 우승하므로 그 확률은

$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$

(ii) B의 주사위에서 나온 눈의 수가 4인 경우

A의 주사위에서 나온 눈의 수가 2, C의 주사위에서 나온 눈의 수가 1일 때, B가 우승하므로 그 확률은

$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$

(i), (ii)에서 B가 우승할 확률은 $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

203 A가 소수가 적힌 공을 뽑는 사건을 A, B가 소수가 적힌 공을 뽑는 사건을 B라 하면

(i) A가 소수가 적힌 공을 뽑고, B도 소수가 적힌 공을 뽑을 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$ …… ㉮

(ii) A가 소수가 아닌 수가 적힌 공을 뽑고, B는 소수가 적힌 공을 뽑을 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$ …… ㉯

(i), (ii)에서 B가 소수가 적힌 공을 뽑을 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{2}{5}$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ A가 소수가 적힌 공을 뽑고, B도 소수가 적힌 공을 뽑을 확률 구하기	40%
㉯ A가 소수가 아닌 수가 적힌 공을 뽑고, B는 소수가 적힌 공을 뽑을 확률 구하기	40%
㉰ B가 소수가 적힌 공을 뽑을 확률 구하기	20%

204 상자 A, B를 택하는 사건을 각각 A, B라 하고, 초록색 구슬이 나오는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{16}$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{1}{5}+\frac{5}{16}=\frac{41}{80}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{41}{80}}=\frac{16}{41}$

1등급 비법

사건 E가 일어났을 때, 사건 A의 조건부확률은
$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)}$

205 기계 A에서 생산된 제품을 택하는 사건을 A, 기계 B에서 생산된 제품을 택하는 사건을 B, 불량품인 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=0.4\times0.01=0.004$

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=0.6\times0.02=0.012$

$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=0.016$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{0.012}{0.016}=\frac{3}{4}$

206 (1) (i) 갑이 가위를 내서 이길 확률은 $0.3\times0.4=0.12$

(ii) 갑이 바위를 내서 이길 확률은 $0.4\times0.2=0.08$

(iii) 갑이 보를 내서 이길 확률은 $0.3\times0.4=0.12$

이상에서 갑이 이길 확률은

$0.12+0.08+0.12=0.32$ …… ㉮

(2) 갑이 이기는 사건을 A, 갑이 가위를 내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.12}{0.32}=\frac{3}{8}$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 갑이 이길 확률 구하기	50%
㉯ 갑이 이겼을 때, 가위를 내서 이겼을 확률 구하기	50%

207 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 검은 공을 꺼내는 사건을 B, 검은 공이라고 대답하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(E|A)=0.4$, $\mathrm{P}(E|B)=0.6$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|E)&=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)}\\&=\frac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)}\\&=\frac{\frac{3}{5}\times0.6}{\frac{2}{5}\times0.4+\frac{3}{5}\times0.6}=\frac{9}{13}\end{aligned}$$

208 내일 비가 오는 사건을 A, 내일 경기에서 이기는 사건을 E라 하면 내일 비가 오지 않는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(A^C)=0.6$

$\mathrm{P}(E|A)=0.7$, $\mathrm{P}(E|A^C)=0.5$

따라서 내일 경기에서 이길 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=0.4\times0.7+0.6\times0.5\\&=0.58=\frac{29}{50}\end{aligned}$$

이므로 $a=50$, $b=29$

$\therefore a+b=79$

209 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{5}{8}$

다른풀이 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{2}{3}\{1-\mathrm{P}(B)\}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$1-\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{5}{8}$

210 $\{1, 2, 4, 6\}$이 일어나는 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

① $\{1, 3, 5\}$가 일어나는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

② $\{1, 4, 5\}$가 일어나는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

③ $\{2, 4, 6\}$이 일어나는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

④ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$가 일어나는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

⑤ $\{1, 3, 4, 5, 6\}$이 일어나는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 {1, 2, 4, 6}과 서로 독립인 사건은 ②이다.

1등급 비법

두 사건 A, B가 독립인지 확인하려면 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 각각 구한 후, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$가 성립하는지 조사하면 된다. 이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면 서로 독립이고, $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면 서로 종속이다.

211 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, $C=\{3, 4\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(C\cap A)=\frac{1}{6}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\mathrm{P}(B\cap C)$이므로 두 사건 B와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(C\cap A)$이므로 두 사건 C와 A는 서로 독립이다.

이상에서 서로 독립인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

212 3개의 동전을 동시에 던져서 나오는 면을 순서쌍으로 나타내면

$A=\{$(앞, 뒤, 뒤), (뒤, 앞, 뒤), (뒤, 뒤, 앞), (뒤, 뒤, 뒤)$\}$

$B=\{$(앞, 앞, 앞), (뒤, 뒤, 뒤)$\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$

ㄴ. $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

ㄷ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

213 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{2}{3}$ $\quad\therefore$ $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{12}$

$\therefore$ $a=\frac{1}{12}$ …… ㉮

A, B가 서로 독립사건이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)$ $\quad\therefore$ $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

$\therefore$ $b=\frac{1}{4}$ …… ㉯

$\therefore$ $a+b=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ a의 값 구하기	40%
㉯ b의 값 구하기	40%
㉰ $a+b$의 값 구하기	20%

214 ㄱ. A와 B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)$이므로

$\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=1$

ㄴ. A와 B^C가 서로 독립이면 A와 B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

ㄷ. A와 B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B, A^C와 B^C 모두 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\mathrm{P}(A^C)$

$1-\mathrm{P}(A^C|B)=1-\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(A)$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A^C|B^C)\neq1-\mathrm{P}(A^C|B)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

참고 A, B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B, A^C와 B^C도 서로 독립이다.

1등급 비법

배반사건과 독립사건의 관계는 다음과 같다.
$\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$인 두 사건 A, B에 대하여
① A, B가 서로 배반이면 A, B는 서로 종속이다.
② A, B가 서로 독립이면 A, B는 서로 배반이 아니다.

215 ㄱ. $A_2=\{2, 4, 6\}$, $A_3=\{3, 6\}$, $A_2\cap A_3=\{6\}$이므로

$\mathrm{P}(A_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A_3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A_2\cap A_3)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A_2\cap A_3)=\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3)$이므로 A_2와 A_3은 서로 독립이다.

ㄴ. $A_2=\{2, 4, 6\}$, $A_4=\{4\}$, $A_2\cap A_4=\{4\}$이므로

$\mathrm{P}(A_4|A_2)=\frac{\mathrm{P}(A_4\cap A_2)}{\mathrm{P}(A_2)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

ㄷ. $A_2=\{2, 4, 6\}$, $A_5=\{5\}$이므로 $A_2\cap A_5=\varnothing$

따라서 A_2와 A_5는 서로 배반사건이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

216 자유투를 한 번 던져 성공할 확률이 $\frac{2}{3}$이므로 실패할 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 5번의 자유투를 던져 3번 성공할 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10\cdot2^3}{3^5}=\frac{80}{243}$

217 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3 이상의 눈이 나올 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(i) 3 이상의 눈이 3번 나올 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$$

(ii) 3 이상의 눈이 4번 나올 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{32}{81}+\frac{16}{81}=\frac{16}{27}$$

218 불량품이 두 개 또는 세 개 포함될 확률은

$${}_3C_2(0.2)^2(0.8)^1+{}_3C_3(0.2)^3=3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^1+\left(\frac{1}{5}\right)^3$$
$$=\frac{12}{125}+\frac{1}{125}=\frac{13}{125}$$

219 $a+b$의 값이 6이 되는 경우의 확률은 다음과 같다.

(i) $a=3$, $b=3$인 경우

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot{}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{3^7}$$

(ii) $a=4$, $b=2$인 경우

$${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot{}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{6}{3^7}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{8}{3^7}+\frac{6}{3^7}=\frac{14}{3^7}$$

220 $10\times0.8=8$(명)이므로 8명 이상 참석해야 동호회 행사를 진행할 수 있다.

(i) 8명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{45}{2^{10}}$

(ii) 9명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{10}{2^{10}}$

(iii) 10명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{2^{10}}$

(i), (ii), (iii)에서 동호회 모임이 진행될 확률은

$$\frac{45}{2^{10}}+\frac{10}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}=\frac{56}{2^{10}}=\frac{7}{2^7}$$

$\therefore n=7$

221 A선수가 이길 확률이 $\frac{3}{5}$이므로 B선수가 이길 확률은

$$1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

다섯 번째 경기에서 승부가 결정되려면 우승하는 선수는 네 번째 경기까지 3번 이기고 1번 진 후, 다섯 번째 경기에서 이겨야 한다. …… ㉮

(i) A선수가 우승할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1\cdot\frac{3}{5}=\frac{648}{5^5}$$ …… ㉯

(ii) B선수가 우승할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1\cdot\frac{2}{5}=\frac{192}{5^5}$$ …… ㉰

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{648}{5^5}+\frac{192}{5^5}=\frac{840}{5^5}=\frac{168}{625}$$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ 승부가 결정되는 경우 알기	20%
㉯ A선수가 우승할 확률 구하기	30%
㉰ B선수가 우승할 확률 구하기	30%
㉱ 승부가 결정될 확률 구하기	20%

222 한 개의 주사위를 5번 던져 A지점에 있던 바둑돌이 B지점에 있으려면 오른쪽으로 2칸, 왼쪽으로 1칸, 위쪽으로 2칸 이동하면 된다.

1 또는 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 3의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$,

4 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 구하는 확률은

$$\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{36}$$

1등급 비법

1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률을 a, 사건 B가 일어날 확률을 b, 사건 C가 일어날 확률을 c라 할 때, 이 시행을 독립적으로 n회 반복하는 시행에서 A가 p회, B가 q회, C가 r회 일어날 확률은

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r \text{ (단, } a+b+c=1,\ p+q+r=n)$$

223 P(4)는 10회 시행 중 흰 구슬이 4번 나올 확률이므로

$$\mathrm{P}(4)={}_{10}C_4\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^6$$

P(6)는 10회 시행 중 흰 구슬이 6번 나올 확률이므로

$$\mathrm{P}(6)={}_{10}C_6\left(\frac{3}{5}\right)^6\left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$\therefore \frac{\mathrm{P}(6)}{\mathrm{P}(4)}=\frac{{}_{10}C_6\left(\frac{3}{5}\right)^6\left(\frac{2}{5}\right)^4}{{}_{10}C_4\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^6}=\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{9}{4}$$

내신 완성 1등급문제 pp. 64~65

224 A, C, B **225** ② **226** ② **227** $\frac{1}{15}$

228 (1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{4}{9}$ (3) 서로 독립이 아니다. **229** ②

230 ② **231** $\frac{10}{81}$

224 조건부확률

전략 A, B, C집에서 우산을 분실한 사건에 대한 조건부확률을 각각 구하여 크기를 비교한다.

풀이 A, B, C집에 가는 사건을 각각 A, B, C라 하고, 우산을 분실하는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{4}}{\mathrm{P}(E)}$$

$$P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}}{P(E)}=\frac{\frac{3}{20}}{P(E)}$$

$$P(C|E)=\frac{P(C\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}}{P(E)}=\frac{\frac{6}{25}}{P(E)}$$

$P(A|E)>P(C|E)>P(B|E)$이므로 A, C, B의 순서로 가는 것이 합리적이다.

참고 우산을 분실할 확률은

$$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{20}+\frac{6}{25}=\frac{16}{25}$$

1등급 비법

A, B, C집 순으로 방문하여 우산을 분실하였으므로 B집에서 우산을 분실했다면 A집에서는 우산을 분실하지 않은 것이다.
따라서 $P(B\cap E)$를 구할 때 A집에서 우산을 분실하지 않을 확률 $\frac{3}{4}$을 반드시 곱해야 한다.
같은 방법으로 C집에서 우산을 분실했다면 A, B집에서는 우산을 분실하지 않은 것이므로 $P(C\cap E)$를 구할 때 $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}$를 반드시 곱해야 한다.

225 확률의 곱셈정리와 조건부확률

전략 주어진 세 사건을 A, B, E로 놓고, $P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$임을 이용한다.

풀이 상자 A, B를 택하는 사건을 각각 A, B, 꺼낸 공이 검은 공인 사건을 E라 하면 구하는 확률은

$$P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}$$
$$=\frac{P(B\cap E)}{P(A\cap E)+P(B\cap E)}$$
$$=\frac{P(B)P(E|B)}{P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{2}{5}$$

226 확률의 곱셈정리와 조건부확률

전략 주사위 A, B, C에서 같은 수가 적힌 면이 나오는 사건에 대한 조건부확률을 각각 구한다.

풀이 주사위 A, B, C를 선택하는 사건을 각각 A, B, C라 하고, 주사위를 두 번 던졌을 때 두 번 모두 같은 수가 나오는 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{27}$$
$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{27}$$
$$P(C\cap E)=P(C)P(E|C)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(1\cdot1)=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}$$
$$=\frac{P(A\cap E)}{P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)}$$
$$=\frac{\frac{5}{27}}{\frac{5}{27}+\frac{5}{27}+\frac{1}{3}}=\frac{5}{19}$$

227 확률의 곱셈정리

전략 세 번째 검사에서 검사가 끝나려면 두 번째 검사까지 불량품이 1개만 나와야 함을 이용한다.

풀이 두 번째 검사에서 검사가 끝나려면 불량품 2개를 모두 꺼내야 하므로

$$p_1=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$$

세 번째 검사에서 검사가 끝나려면 두 번째 검사까지 불량품이 1개, 정상품이 1개 나오고 세 번째 검사에서 불량품이 나와야 하므로

$$p_2=\left(\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}+\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{1}{8}=\frac{2}{45}$$

$$\therefore\ p_1+p_2=\frac{1}{45}+\frac{2}{45}=\frac{1}{15}$$

1등급 비법

제품을 1개씩 꺼낼 때 두 번째 불량품이 나오는 순간 검사가 끝나므로 n번째 검사에서 검사를 끝내기 위해서는 $(n-1)$번째 검사까지는 불량품이 1개만 나오고 n번째 검사에서 두 번째 불량품이 나오면 된다.

228 독립과 종속

전략 뽑은 두 개의 공에 적힌 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이면 두 수의 합이 짝수가 된다.

풀이 (1) (i) 두 개의 공에 적힌 수가 모두 짝수일 확률은

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{9}$$

(ii) 두 개의 공에 적힌 수가 모두 홀수일 확률은

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{9}$$

(i), (ii)에서

$$P(A)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9} \quad \cdots\cdots ㉮$$

(2) (i) 모두 흰 공을 뽑을 확률은

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{9}$$

(ii) 모두 검은 공을 뽑을 확률은

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{9}$$

(i), (ii)에서

$$P(B)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9} \quad \cdots\cdots ㉯$$

(3) (i) 두 개의 공에 적힌 수가 모두 짝수이면서 모두 흰 공일 확률은

04 조건부확률

$$\frac{{}_2C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{45}$$

(ii) 두 개의 공에 적힌 수가 모두 짝수이면서 모두 검은 공일 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{15}$$

(iii) 두 개의 공에 적힌 수가 모두 홀수이면서 모두 흰 공일 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{15}$$

(iv) 두 개의 공에 적힌 수가 모두 홀수이면서 모두 검은 공일 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{45}$$

이상에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{45}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{45}=\frac{8}{45}$$

그런데 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$이므로

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$

따라서 A, B는 서로 독립이 아니다. …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $\mathrm{P}(A)$의 값 구하기	30%
㉯ $\mathrm{P}(B)$의 값 구하기	30%
㉰ A, B가 서로 독립인지 판별하기	40%

229 독립시행의 확률

전략 B팀이 7차전에서 우승하려면 6번째 경기까지 3승 3패가 되고 7번째 경기에서 B팀이 승리해야 함을 이용한다.

풀이 첫 번째 경기에서 A팀이 승리하였으므로 2번째 경기부터 6번째 경기까지 5번의 경기 중에서 B팀이 3번 승리하고 7번째 경기에서 B팀이 승리하면 된다.

따라서 구하는 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$$

230 조건부확률 ⊕ 독립과 종속

1단계 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=x$, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=y$로 놓고 두 사건 A, B가 서로 독립임을 이용하여 x, y에 대한 식을 세운다.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=x$, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=y$라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{3}+x,$$

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{3}+y$$

이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ xy+\frac{1}{3}(x+y)+\frac{1}{9}=\frac{1}{3} \quad\cdots\cdots ㉠$$

또, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\frac{5}{6}=\left(x+\frac{1}{3}\right)+\left(y+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ x+y=\frac{1}{2} \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$xy+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3} \qquad \therefore\ xy=\frac{1}{18} \quad\cdots\cdots ㉢$$

2단계 1단계에서 세운 두 식을 연립하여 풀어 $\mathrm{P}(A\cap B^C)$, $\mathrm{P}(A^C\cap B)$의 값을 구한다.

㉡, ㉢을 연립하면

$$x\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{1}{18},\ x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{18}=0$$

$18x^2-9x+1=0$, $(6x-1)(3x-1)=0$

$$\therefore\ x=\frac{1}{6} \text{ 또는 } x=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \begin{cases}x=\frac{1}{6}\\ y=\frac{1}{3}\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}x=\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{6}\end{cases}$$

그런데 $\mathrm{P}(A)<\mathrm{P}(B)$이므로 $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{3}$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{3}$

3단계 조건부확률을 이용하여 $\mathrm{P}(B^C|A)$의 값을 구한다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

231 독립시행의 확률

1단계 말이 4행 5열로 이동하려면 각 방향으로 몇 칸씩 이동해야 하는지 구한다.

말이 1행 1열에서 4행 5열로 이동하려면 오른쪽으로 4칸, 아래로 3칸, 총 7칸을 이동해야 하고, 5번의 가위바위보로 7칸을 이동하기 위해서는 [규칙 3]에 의해 대각선으로 2칸, [규칙 1]에 의해 오른쪽으로 2칸, [규칙 2]에 의해 아래로 1칸을 이동해야 한다.

2단계 대각선으로 2칸, 오른쪽으로 2칸, 아래로 1칸 이동할 확률을 구한다.

비기면 오른쪽으로 1칸, 아래로 1칸, 즉 대각선으로 1칸 이동하므로 대각선으로 2칸 이동할 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

갑이 이기면 오른쪽으로 1칸 이동하므로 오른쪽으로 2칸 이동할 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

을이 이기면 아래로 1칸 이동하므로 아래로 1칸 이동할 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3}$$

이때 (대각선, 대각선, 오른쪽, 오른쪽, 아래)를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{5!}{2!2!}=30$$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot30=\frac{10}{81}$

II. 확률

실전 대비 II단원 평가문제

pp. 66~67

232 ③	233 ④	234 ②	235 $\frac{3}{5}$	236 ⑤
237 ①	238 $\frac{4}{9}$	239 ④		

232 수학적 확률

전략 직선 $y=\frac{b}{a}x$가 선분 AB와 만날 조건을 구한다.

풀이 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\cdot6=36$

직선 $y=\frac{b}{a}x$에서 y좌표가 1일 때, x좌표는 $\frac{a}{b}$이므로 직선 $y=\frac{b}{a}x$와 선분 AB가 만나는 경우는 $2\le\frac{a}{b}\le3$일 때이다.

이때 $2\le\frac{a}{b}\le3$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1), (3, 1), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (6, 3)$

의 6가지이므로 구하는 확률은

$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

233 수학적 확률

전략 네 명이 가위바위보를 하는 모든 경우의 수는 중복순열이다.

풀이 4명이 가위바위보를 하는 모든 경우의 수는 가위, 바위, 보 3개 중에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

4명 중 이기는 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$이고,

이 2명이 이기는 경우는

(가위, 가위, 보, 보), (바위, 바위, 가위, 가위),

(보, 보, 바위, 바위)

의 3가지이므로

4명 중 2명이 이기는 경우의 수는

$6\cdot3=18$

따라서 구하는 확률은

$\frac{18}{81}=\frac{2}{9}$

234 여사건의 확률

전략 $P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)$과 $P(A^C)=1-P(A)$임을 이용한다.

풀이 $P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)$

$=1-P(A\cap B)=\frac{4}{5}$

이므로 $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)$

$=P(A)-\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$

이므로 $P(A)=\frac{9}{20}$

$\therefore P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$

235 여사건의 확률

전략 첫째 날과 여섯째 날에 모두 여학생이 봉사 활동을 하게 될 확률을 구하여 여사건의 확률을 이용한다.

풀이 전체 경우의 수는 $6!$

첫째 날과 여섯째 날에 남학생이 봉사활동을 하지 않는 경우의 수는 여학생 4명 중 2명이 첫째 날과 여섯째 날에 봉사활동을 하고 나머지 4명의 학생이 둘째 날부터 다섯째 날까지 하루씩 봉사활동을 하는 경우의 수와 같으므로

${}_4P_2\cdot4!$

따라서 남학생이 첫째 날과 여섯째 날에 봉사활동을 하지 않을 확률은

$\frac{{}_4P_2\cdot4!}{6!}=\frac{4\cdot3\cdot4!}{6!}=\frac{2}{5}$

이므로 구하는 확률은

$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

236 조건부확률

전략 주어진 조건을 표로 나타내고 조건부확률을 이용한다.

풀이 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

	지각한 학생	지각하지 않은 학생
버스로 등교	$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{20}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{19}{20}$
걸어서 등교	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{14}{15}$

$\therefore$ (구하는 확률)

$=\frac{(\text{버스로 등교한 학생 중 지각한 학생의 비율})}{(\text{지각한 학생의 비율})}$

$=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{20}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{20}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{15}}=\frac{9}{17}$

237 확률의 곱셈정리

전략 1부터 10까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 4번째까지 소수를 3개 뽑고 5번째에 나머지 소수 1개를 뽑아야 함을 이용한다.

풀이 1부터 10까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 4번째까지 소수를 3개 뽑고 5번째에 나머지 소수 1개를 뽑으면 시행이 멈춘다.

4번째까지 소수를 3개 뽑는 경우의 수는

(소수, 소수, 소수, 소수가 아닌 수)

를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{4!}{3!}=4$

또, 그 각각의 확률은

$\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7}=\frac{1}{35}$

따라서 구하는 확률은

$\left(4\cdot\frac{1}{35}\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{105}$

다른풀이 $\frac{({}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_6\mathrm{C}_1\cdot 4!)\cdot{}_1\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{P}_5}=\frac{2}{105}$

238 **독립과 종속**

전략 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

풀이 TV 프로그램 A, B를 시청하는 사람들 중에서 임의로 한 명을 뽑을 때, 그 사람이 A 프로그램을 시청하는 사건을 A, 20세 미만인 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{250}{400}=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(E)=\frac{160}{400}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap E)=\frac{a}{400}$

이때 두 사건 A, E가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E)$, 즉

$\frac{a}{400}=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{4}$

따라서 $a=100$, $b=60$, $c=150$, $d=90$이므로

$\frac{ab}{cd}=\frac{100\cdot 60}{150\cdot 90}=\frac{4}{9}$

1등급 비법

두 사건 A, B가 서로 독립이다.
$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^C)$
$\Longleftrightarrow$ A와 B^C, A^C와 B, A^C와 B^C도 서로 독립이다.

239 **독립시행의 확률**

전략 $a_i\,(1\le i\le 6)$의 값은 0 또는 1이므로 $S_3=2$이고 $S_6=3$이 되는 경우는 동전을 6번 던지는 시행에서 3번째까지 앞면이 2번 나오고, 4번째부터 6번째까지 앞면이 1번 나오는 경우임을 이용한다.

풀이 동전의 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

$S_3=2$이고 $S_6=3$이 되는 경우는 동전을 6번 던지는 시행에서 3번째까지 앞면이 2번 나오고, 4번째부터 6번째까지 앞면이 1번 나오는 경우이므로 구하는 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$

III 통계

05 확률분포

교과서에서 뽑은 기본 문제 pp. 70~71

240 기댓값 : 1, 분산 : $\frac{1}{2}$ **241** (1) 풀이 참조 (2) $\frac{7}{2}$ (3) $\frac{35}{12}$

242 (1) 평균 : 17, 분산 : 18 (2) 평균 : -9, 분산 : 8

243 (1) 20 (2) $\frac{50}{3}$ (3) $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ **244** $\frac{1}{2}$

245 (1) 0.6826 (2) 0.0062

240 확률변수 X의 기댓값과 분산을 각각 $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$라 하면

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}-1^2=\frac{1}{2}$

241 (1)

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}$

$=\frac{7}{2}$

(3) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}$

$+6^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2$

$=\frac{35}{12}$

242 (1) $\mathrm{E}(3X-1)=3\mathrm{E}(X)-1=3\times 6-1=17$

$\mathrm{V}(3X-1)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times 2=18$

(2) $\mathrm{E}(-2X+3)=-2\mathrm{E}(X)+3=-2\times 6+3=-9$

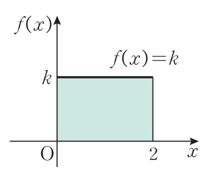
$\mathrm{V}(-2X+3)=(-2)^2\mathrm{V}(X)=4\times 2=8$

243 (1) $\mathrm{E}(X)=120\times\frac{1}{6}=20$

(2) $\mathrm{V}(X)=120\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{100}{6}=\frac{50}{3}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{50}{3}}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$

244 $f(x)=k$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 직사각형의 넓이가 1이므로



$2\times k=1$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

245 $Z=\dfrac{X-10}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(8\le X\le 12)=\mathrm{P}\left(\dfrac{8-10}{2}\le Z\le \dfrac{12-10}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=2\times 0.3413=0.6826$

(2) $\mathrm{P}(X\ge 15)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{15-10}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$
$=0.5-0.4938=0.0062$

내신 분석 기출문제 pp. 72~80

246 ⑤	**247** $\frac{55}{8}$	**248** ④	**249** $\frac{9}{8}$	**250** $\frac{15}{16}$
251 ④	**252** ③	**253** ③	**254** ⑤	**255** $\frac{19000}{3}$
256 19	**257** ②	**258** ①	**259** ⑤	
260 (1) 풀이 참조	(2) $\frac{3}{2}$	(3) $\frac{9}{20}$	(4) 45	**261** ⑤
262 ①	**263** ③	**264** ④	**265** ④	**266** ③
267 ④	**268** 41	**269** ③	**270** $\frac{1}{2}$	**271** ③
272 $\frac{3}{2}$	**273** ①	**274** ④	**275** ④	**276** ③
277 ⑤	**278** (1) 550	(2) 174.2 cm		**279** ①
280 ②	**281** ⑤	**282** ②	**283** ⑤	**284** 0.9332
285 ⑤				

246 확률의 총합은 1이므로

$\left(a+\dfrac{1}{2}\right)+a+\dfrac{1}{4}=1$

$2a=\dfrac{1}{4}\qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{8}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X^2=1)=\mathrm{P}(X=-1$ 또는 $X=1)$
$=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)$
$=\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{8}$

247 확률변수 X가 가지는 값은 0, 10, 100, 110이므로 $a=110$이고, $X=10$이면 10원짜리 동전은 앞면이 나오고 100원짜리 동전은 뒷면이 나오므로

$\mathrm{P}(X=10)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\qquad \therefore\ b=\dfrac{1}{4}$

$X=100$이면 10원짜리 동전은 뒷면이 나오고 100원짜리 동전은 앞면이 나오므로

$\mathrm{P}(X=100)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\qquad \therefore\ c=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ abc=110\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{55}{8}$

248 확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{6}{10},\ \mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{3}{10},$

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{10}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$
$=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{5}$

249 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=9)$

$=\dfrac{k}{2\cdot 1}+\dfrac{k}{3\cdot 2}+\dfrac{k}{4\cdot 3}+\cdots+\dfrac{k}{9\cdot 8}$

$=k\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+k\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+k\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+k\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{9}\right)$

$=k\left(1-\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{8}{9}k=1$

$\therefore\ k=\dfrac{9}{8}$

참고 $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\ne B$)

250 확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 6이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{7-k}{16},\ \mathrm{P}(X=2)=\dfrac{7-2k}{16},$

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{7-3k}{16},\ \mathrm{P}(X=6)=\dfrac{7-6k}{16}$

확률의 총합은 1이므로

$\dfrac{7-k}{16}+\dfrac{7-2k}{16}+\dfrac{7-3k}{16}+\dfrac{7-6k}{16}=1$

$\dfrac{28-12k}{16}=1,\ 28-12k=16\qquad \therefore\ k=1$ …… ㉮

또, $X^2-2X-15<0$에서

$(X+3)(X-5)<0\qquad \therefore\ -3<X<5$ …… ㉯

$\therefore\ \mathrm{P}(X^2-2X-15<0)$
$=\mathrm{P}(-3<X<5)$
$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$
$=1-\mathrm{P}(X=6)$
$=1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ k의 값 구하기	40%
㉯ 확률변수 X의 값의 범위 구하기	30%
㉰ 확률 구하기	30%

1등급 비법

확률변수 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에 대하여 p_i의 일부를 모르거나 함수식에 미정계수가 있을 때는

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_i=p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=1$

임을 이용한다.

251 확률의 총합은 1이므로

$0.2+a+0.3=1\qquad \therefore\ a=0.5$

또, $m=\sum_{i=1}^{3}x_ip_i$이므로

$m=1\times0.2+2\times0.5+3\times0.3=2.1$

$\therefore\ a+m=0.5+2.1=2.6$

252 확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+b=1$

$\therefore\ a=\frac{3}{4}-b$ …… ㉠

또, $\mathrm{E}(X)=5$이므로

$1\times a+3\times\frac{1}{4}+7\times b=5$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{3}{4}-b+\frac{3}{4}+7b=5 \qquad \therefore\ b=\frac{7}{12}$

253 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$

1등급 비법

먼저 확률변수 X가 가지는 값에 대하여 그 각각의 확률을 구한 후 X의 확률분포를 표로 나타낸다. 이때

$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$, $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

임을 이용한다.

254 확률의 총합은 1이므로

$a+b+c=1$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=2$이므로 $1\times a+2\times b+3\times c=2$

$\therefore\ a+2b+3c=2$ …… ㉡

$\sigma(X)=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{V}(X)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$이므로

$1^2\times a+2^2\times b+3^2\times c=\frac{17}{4}$

$\therefore\ a+4b+9c=\frac{17}{4}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{8},\ b=\frac{3}{4},\ c=\frac{1}{8}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\le2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}=\frac{7}{8}$

255 확률변수 X가 가지는 값은

1000, 5000, 10000이므로 …… ㉮

그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=1000)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

$\mathrm{P}(X=5000)=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times3+\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times3$

$=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(X=10000)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1000	5000	10000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{27}$	1

…… ㉯

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=1000\times\frac{1}{27}+5000\times\frac{2}{3}+10000\times\frac{8}{27}$

$=\frac{19000}{3}$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 확률변수 X가 가지는 값 구하기	30%
㉯ X의 값에 따라 각각의 확률을 구하여 표로 나타내기	40%
㉰ X의 기댓값 구하기	30%

256 $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{5}=\frac{19}{10}$이므로

$\mathrm{E}(10X)=10\mathrm{E}(X)=10\times\frac{19}{10}=19$

257 $Y=\frac{X+a}{b}$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{X+a}{b}\right)=\frac{1}{b}\mathrm{E}(X)+\frac{a}{b}$

$=\frac{3}{b}+\frac{a}{b}=4$

$\therefore\ 3+a=4b$ …… ㉠

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}\left(\frac{X+a}{b}\right)=\frac{1}{b^2}\mathrm{V}(X)$

$=\frac{16}{b^2}=4$

$b^2=4 \qquad \therefore\ b=2\ (\because\ b>0)$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $3+a=8 \qquad \therefore\ a=5$

$\therefore\ a+b=7$

258 $\mathrm{E}(Y)=4$, $\mathrm{E}(Y^2)=28$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=28-4^2=12$

$Y=\frac{1}{2}X+5$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}X+5\right)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+5=4$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=-2$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+5\right)=\frac{1}{4}\mathrm{V}(X)=12$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=48$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=-2+48=46$

259 $\mathrm{E}(X)=a$, $\mathrm{E}(X^2)=2a+3$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=-a^2+2a+3$

$\sigma(2X)=2\sigma(X)=2\sqrt{-a^2+2a+3}$

$=2\sqrt{-(a-1)^2+4}$

따라서 $2X$의 표준편차는 $a=1$일 때 최댓값 4를 갖는다.

260 (1) 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

…… ㉮

(2) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}$

$=\frac{3}{2}$ …… ㉯

(3) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=0^2\times\frac{1}{20}+1^2\times\frac{9}{20}+2^2\times\frac{9}{20}+3^2\times\frac{1}{20}-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$=\frac{27}{10}-\frac{9}{4}=\frac{9}{20}$ …… ㉰

(4) $\mathrm{V}(10X+3)=100\mathrm{V}(X)=100\times\frac{9}{20}=45$ …… ㉱

채점 기준	배점 비율
㉮ X의 확률분포를 표로 나타내기	30%
㉯ X의 평균 구하기	20%
㉰ X의 분산 구하기	30%
㉱ $10X+3$의 분산 구하기	20%

261 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{2!\times2!}{4!}=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2!\times2!\times{}_2\mathrm{C}_1\times2!}{4!}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2!\times2!}{4!}=\frac{1}{6}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=1$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{2}{3}+2^2\times\frac{1}{6}-1^2$

$=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$

$\sigma(X)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \sigma(6X-8)=6\sigma(X)=6\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

262 $\mathrm{E}(X)=10$, $\mathrm{V}(X)=8$이므로

$np=10$ …… ㉠

$np(1-p)=8$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$10(1-p)=8$ $\therefore\ p=\frac{1}{5}$

$p=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{5}n=10$ $\therefore\ n=50$

263 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$

$\mathrm{E}(2X+5)=13$이므로 $2\mathrm{E}(X)+5=13$

$2\times\frac{n}{3}+5=13$ $\therefore\ n=12$

264 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던질 때 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=64\times\frac{1}{4}=16$, $\mathrm{V}(X)=64\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=12$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=16+12=28$

265 ${}_{16}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{8}\right)^x\left(\frac{7}{8}\right)^{16-x}$은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{1}{8}$인 어떤 사건이 16번의 독립시행에서 x번 일어날 확률이다.

따라서 이 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16,\ \frac{1}{8}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=16\times\frac{1}{8}=2$, $\mathrm{V}(X)=16\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{4}$

$\therefore\ \sum_{k=0}^{16}k^2\,{}_{16}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{8}\right)^k\left(\frac{7}{8}\right)^{16-k}=\sum_{k=0}^{16}k^2\mathrm{P}(X=k)$

$=\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{7}{4}+2^2=\frac{23}{4}$

1등급 비법

확률변수 X의 확률이 독립시행의 확률로 나타내어지면 X는 이항분포를 따른다.

266 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(10,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{10-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$

이때 $\mathrm{P}(X=1)=5\mathrm{P}(X=0)$이므로

${}_{10}\mathrm{C}_1 p^1(1-p)^9=5{}_{10}\mathrm{C}_0 p^0(1-p)^{10}$

$10p(1-p)^9=5(1-p)^{10}$

$10p=5(1-p)\qquad \therefore\ p=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=2)={}_{10}\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^8$

$=5\left(\dfrac{2}{3}\right)^8$

267 주사위를 던지는 시행은 독립시행이고, 주사위를 한 번 던질 때 4의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{1}{6}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \dfrac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(4^X)=\displaystyle\sum_{x=0}^{10}4^x{}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{10-x}$

$=\displaystyle\sum_{x=0}^{10}{}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{4}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{10-x}$

$=\left(\dfrac{4}{6}+\dfrac{5}{6}\right)^{10}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$

268 $E=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3)\}$

이므로 $\mathrm{P}(E)=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$ …… ㉮

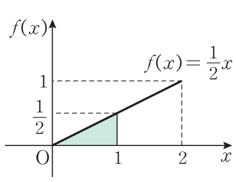
따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(24,\ \dfrac{5}{12}\right)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=24\times\dfrac{5}{12}\times\dfrac{7}{12}=\dfrac{35}{6}$ …… ㉯

$\therefore\ p+q=6+35=41$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 사건 E가 일어날 확률 구하기	40%
㉯ X의 분산 구하기	40%
㉰ $p+q$의 값 구하기	20%

269 $\mathrm{P}(0\le X\le 1)$은 $f(x)=\dfrac{1}{2}x$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



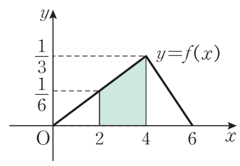
$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{4}$

270 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\dfrac{1}{2}\times6\times k=1\qquad\therefore\ k=\dfrac{1}{3}$

$\mathrm{P}(2\le X\le 4)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



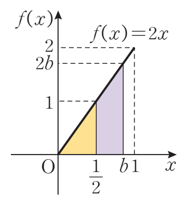
$\mathrm{P}(2\le X\le 4)$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\right)\times2=\dfrac{1}{2}$

271 $f(x)=ax$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\dfrac{1}{2}\times1\times a=1\qquad\therefore\ a=2$

또, $\mathrm{P}\left(0\le X\le\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}\le X\le b\right)$이려면 오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같아야 한다. 즉,

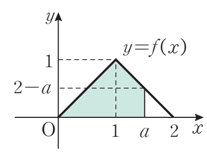


$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{2}\times(1+2b)\times\left(b-\dfrac{1}{2}\right)$

$b^2=\dfrac{1}{2}\qquad\therefore\ b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ (\because\ b>0)$

$\therefore\ ab=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

272 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $\mathrm{P}(X\le a)$는 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(X\le a)$

$=1-\dfrac{1}{2}\times(2-a)\times(2-a)=\dfrac{7}{8}$

$4a^2-16a+15=0,\ (2a-3)(2a-5)=0$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{2}\ (\because\ a<2)$

273 $8x^2-6x+1=0$에서

$(4x-1)(2x-1)=0\qquad\therefore\ x=\dfrac{1}{4}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X\le2),\ \mathrm{P}(X\le4)$의 값이 이차방정식 $8x^2-6x+1=0$의 두 근이고, $\mathrm{P}(X\le2)\le\mathrm{P}(X\le4)$이므로

$\mathrm{P}(X\le2)=\dfrac{1}{4},\ \mathrm{P}(X\le4)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}(4\le X\le5)=1-\mathrm{P}(X\le4)$

$=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

274 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, $\mathrm{P}(X\le17)=\mathrm{P}(X\ge23)$이므로

$m=\dfrac{17+23}{2}=20$

275 ④ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 클수록 가운데 부분의 높이는 낮아지면서 그래프의 모양은 양쪽으로 퍼지고 σ의 값이 작을수록 가운데 부분의 높이는 높아지면서 그래프의 모양은 뾰족하게 된다.

276 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.84)=\mathrm{P}(-1.84\le Z\le 1.84)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.84)$
$=2\times 0.4671=0.9342$

277 $Z=\dfrac{X-5}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(3\le X\le k)=\mathrm{P}\left(\dfrac{3-5}{2}\le Z\le \dfrac{k-5}{2}\right)$
$=\mathrm{P}\left(-1\le Z\le \dfrac{k-5}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{k-5}{2}\right)$
$=0.34+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{k-5}{2}\right)=0.82$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{k-5}{2}\right)=0.48$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$\dfrac{k-5}{2}=2 \qquad \therefore\ k=9$

278 학생들의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-170}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. …… ㉮

(1) $\mathrm{P}(167.4\le X\le 175.2)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{167.4-170}{5}\le Z\le \dfrac{175.2-170}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(-0.52\le Z\le 1.04)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.52)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.04)$
$=0.20+0.35=0.55$

따라서 $1000\times 0.55=550$(명)이므로 구하는 학생 수는 550이다. …… ㉯

(2) 키가 200번째로 큰 학생의 키를 k cm라 하면

$\mathrm{P}(X\ge k)=\dfrac{200}{1000}=0.2$

$\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{k-170}{5}\right)=0.2$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{k-170}{5}\right)=0.2$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{k-170}{5}\right)=0.3$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.84)=0.3$이므로

$\dfrac{k-170}{5}=0.84 \qquad \therefore\ k=174.2$

따라서 키가 200번째로 큰 학생의 키는 174.2 cm이다. …… ㉰

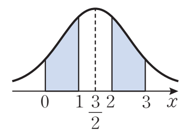
채점 기준	배점 비율
㉮ 확률변수 X를 표준화하기	20%
㉯ 키가 167.4 cm 이상 175.2 cm 이하인 학생 수 구하기	40%
㉰ 키가 200번째로 큰 학생의 키 구하기	40%

279 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(\dfrac{3}{2},\ 2^2\right)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-\frac{3}{2}}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$H(0)=\mathrm{P}(0\le X\le 1)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{0-\frac{3}{2}}{2}\le Z\le \dfrac{1-\frac{3}{2}}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(-0.75\le Z\le -0.25)$
$=\mathrm{P}(0.25\le Z\le 0.75)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.75)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.25)$
$=0.2734-0.0987=0.1747$

오른쪽 그림에서



$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\mathrm{P}(2\le X\le 3)$이므로

$H(0)=H(2)$

$\therefore\ H(0)+H(2)=2H(0)$
$=2\times 0.1747=0.3494$

1등급 비법

평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용한다.

280 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(64,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=64\times\dfrac{1}{2}=32,\ \mathrm{V}(X)=64\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=16$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-32}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(28\le X\le 36)=\mathrm{P}\left(\dfrac{28-32}{4}\le Z\le \dfrac{36-32}{4}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$
$=2\times 0.34=0.68$

281 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{1}{5}=20,\ \mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=16$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\left|\dfrac{X}{100}-\dfrac{1}{5}\right|<\dfrac{1}{10}\right)=\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{10}<\dfrac{X-20}{100}<\dfrac{1}{10}\right)$
$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{5}{2}<\dfrac{X-20}{4}<\dfrac{5}{2}\right)$
$=\mathrm{P}(-2.5<Z<2.5)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z<2.5)$
$=2\times 0.4938=0.9876$

282 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=48\times\frac{1}{4}=12,\ \mathrm{V}(X)=48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=9$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-12}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(6\le X\le 21)=\mathrm{P}\left(\frac{6-12}{3}\le Z\le\frac{21-12}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 3)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$

$=0.4772+0.4987=0.9759$

283 ${}_{450}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{450-x}$은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{1}{3}$인 어떤 사건이 450번의 독립시행에서 x번 일어날 확률이다. 따라서 이 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{1}{3}=150,\ \mathrm{V}(X)=450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=100$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore$ (주어진 식)

$=\mathrm{P}(X=140)+\mathrm{P}(X=141)+\mathrm{P}(X=142)+\cdots$
$+\mathrm{P}(X=175)$

$=\mathrm{P}(140\le X\le 175)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{140-150}{10}\le Z\le\frac{175-150}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=0.3413+0.4938=0.8351$

284 불량품의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(400,\ 0.1)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times 0.1=40,\ \mathrm{V}(X)=400\times 0.1\times 0.9=36$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. …… ㉮

$\therefore\ \mathrm{P}(X\le 49)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{49-40}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1.5)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5+0.4332=0.9332$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 불량품의 개수를 확률변수 X라 하고 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 X를 표준화하기	50%
㉯ 불량품이 49개 이하일 확률 구하기	50%

285 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{2}=50,\ \mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$

따라서 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 55-4k)=0.9772$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{55-4k-50}{5}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge 1-\frac{4}{5}k\right)=0.9772$

$\mathrm{P}\left(1-\frac{4}{5}k\le Z\le 0\right)+0.5=0.9772$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(1-\frac{4}{5}k\le Z\le 0\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)=0.4772$이므로

$1-\frac{4}{5}k=-2\qquad\therefore\ k=\frac{15}{4}$

$\therefore\ 16k=16\times\frac{15}{4}=60$

1등급 비법

$\mathrm{P}(Z\ge a)=0.9772$에서 $0.9772>0.5$이므로
$\mathrm{P}(Z\ge a)=0.5+\mathrm{P}(a\le Z\le 0)$임을 이용한다.

내신 완성 1등급문제

pp. 81~83

286 ④	**287** ④	**288** ⑤	**289** ③	**290** ③
291 ⑤	**292** ④	**293** 40	**294** ⑤	**295** ⑤
296 219	**297** ②			

286 이산확률변수와 확률질량함수

전략 $\mathrm{P}(X=1)$, 즉 짝수의 개수가 1일 확률을 구한다.

풀이 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고, $\mathrm{P}(X=1)$은 짝수의 개수가 1일 확률이므로

(i) 동전은 뒷면이 나오고 주사위 1개를 던져 나온 눈의 수가 짝수일 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ii) 동전은 앞면이 나오고 주사위 2개를 던져 나온 눈의 수가 짝수 1개, 홀수 1개일 확률은

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

287 이산확률변수와 확률질량함수

전략 확률의 총합이 1임을 이용하여 $F(x)$와 $G(x)$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $\mathrm{P}(0\le X\le 9)=1$이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 9)=\mathrm{P}(0\le X\le x)+\mathrm{P}(x<X\le 9)$

$\therefore F(x)+G(x)=1$

ㄱ. $F(4)+G(4)=1$이므로

$G(4)=1-F(4)$

ㄴ. $\mathrm{P}(4\le X\le 7)$

$=\mathrm{P}(0\le X\le 7)-\mathrm{P}(0\le X\le 3)$

$=F(7)-F(3)$

ㄷ. $\mathrm{P}(4\le X\le 7)$

$=F(7)-F(3)$ ($\because$ ㄴ)

$=\{1-G(7)\}-\{1-G(3)\}$ ($\because F(x)+G(x)=1$)

$=G(3)-G(7)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

288 이항분포

전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따를 때, $\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, n)$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(18, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$$
$$={}_{18}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{18}+{}_{18}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{17}$$
$$=10\times\left(\frac{2}{3}\right)^{18}$$

$$\therefore \mathrm{P}(X\ge 1\,|\,X\le 1)=\frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X\le 1)}=\frac{9\times\left(\frac{2}{3}\right)^{18}}{10\times\left(\frac{2}{3}\right)^{18}}=\frac{9}{10}$$

289 이산확률변수의 기댓값, 분산 ⊕ 이항분포

전략 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$, $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$를 이용하여 $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구한다.

풀이 한 개의 주사위를 5번 던졌을 때 4의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5, \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

X는 원점 O와 점 P 사이의 거리이므로

$X=2Y-(5-Y)$

$\therefore X=3Y-5$

이때

$\mathrm{E}(Y)=5\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$, $\mathrm{V}(Y)=5\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

이므로

$$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(3Y-5)=3\mathrm{E}(Y)-5=3\times\frac{5}{6}-5=-\frac{5}{2}$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(3Y-5)=3^2\mathrm{V}(Y)=9\times\frac{25}{36}=\frac{25}{4}$$

$$\therefore \mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{25}{4}+\left(-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

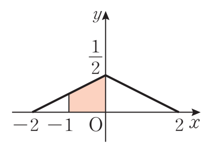
290 연속확률변수와 확률밀도함수

전략 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

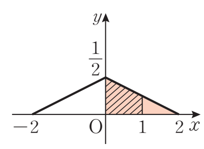
ㄴ. $\mathrm{P}(-1\le X\le 0)$은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$\mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{3}{8}$$

ㄷ. $\mathrm{P}(-1\le X\le 1\,|\,0\le X\le 2)=\frac{\mathrm{P}(0\le X\le 1)}{\mathrm{P}(0\le X\le 2)}$이므로

오른쪽 그림에서 $\mathrm{P}(0\le X\le 2)$는 색칠한 부분의 넓이와 같고, $\mathrm{P}(0\le X\le 1)$은 빗금친 부분의 넓이와 같다.



$$\therefore \mathrm{P}(-1\le X\le 1\,|\,0\le X\le 2)=\frac{\mathrm{P}(0\le X\le 1)}{\mathrm{P}(0\le X\le 2)}=\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 1}{\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

291 정규분포와 표준정규분포

전략 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따름을 이용한다.

풀이 제품 A의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 1)$을 따르므로 $Z_X=X-m$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 제품 A의 무게가 k 이상일 확률은

$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}(Z_X\ge k-m)$

또, 제품 B의 무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(2m, 2^2)$을 따르므로 $Z_Y=\frac{Y-2m}{2}$으로 놓으면

확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 제품 B의 무게가 k 이하일 확률은

$$\mathrm{P}(Y\le k)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{k-2m}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge-\frac{k-2m}{2}\right)$$

이때 제품 A의 무게가 k 이상일 확률과 제품 B의 무게가 k 이하일 확률이 같으므로

$P(Z_X \ge k-m) = P\left(Z_Y \ge -\frac{k-2m}{2}\right)$에서

$k-m = -\frac{k-2m}{2}$

$2k-2m = -k+2m,\ 3k=4m$

$\therefore \frac{k}{m} = \frac{4}{3}$

292 **정규분포와 표준정규분포**

전략 $f(x)$가 $f(40-x)=f(x)$를 만족시키므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=20$에 대하여 대칭이다.

풀이 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(40-x)=f(x)$이므로 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=20$에 대하여 대칭이다.

따라서 $E(X)=20$이므로 확률변수 X는 정규분포 $N(20, 5^2)$을 따른다. 이때 $Z=\frac{X-20}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X \le 15) &= P\left(Z \le \frac{15-20}{5}\right)\\ &= P(Z \le -1)\\ &= 0.5 - P(0 \le Z \le 1)\\ &= 0.5-0.3413 = 0.1587\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X \ge 30) &= P\left(Z \ge \frac{30-20}{5}\right)\\ &= P(Z \ge 2)\\ &= 0.5 - P(0 \le Z \le 2)\\ &= 0.5-0.4772 = 0.0228\end{aligned}$$

따라서 2차 기록 측정 대상자가 될 확률은

$P(X \le 15) + P(X \ge 30) = 0.1587 + 0.0228 = 0.1815$

이므로 2차 기록 측정 대상자 수는

$10000 \times 0.1815 = 1815$

참고 $f(40-x)=f(x)$에 x 대신 $20+x$를 대입하면 $f(40-20-x)=f(20+x)$, 즉 $f(20-x)=f(20+x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=20$에 대하여 대칭이다.

293 **정규분포와 표준정규분포**

전략 기업들의 점수를 확률변수 X라 하고 X를 표준화하여 상위 1 % 이내에 속하기 위한 최저 점수를 구한다.

풀이 기업들의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(160, 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-160}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. …… ㉮

상위 1 % 이내에 속하는 기업의 최저 점수를 a점이라 하면

$P(X \ge a) = 0.01$

$P\left(Z \ge \frac{a-160}{10}\right) = 0.01$

$0.5 - P\left(0 \le Z \le \frac{a-160}{10}\right) = 0.01$

$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{a-160}{10}\right) = 0.49$

이때 $P(0 \le Z \le 2.5) = 0.49$이므로

$\frac{a-160}{10} = 2.5 \qquad \therefore a = 185$ …… ㉯

A 기업이 경영관리분야에서 85점, 경영합리화분야에서 60점을 받았으므로 공정거래기여분야에서 받은 점수를 x점이라 하면

$85+60+x \ge 185 \qquad \therefore x \ge 40$

따라서 A 기업의 공정거래기여분야 점수는 최소 40점이다. …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ 기업들의 점수를 확률변수 X라 하고 X를 표준화하기	20%
㉯ 표창을 수여받기 위한 최저 점수 구하기	50%
㉰ 공정거래기여분야의 최소 점수 구하기	30%

294 **이항분포와 정규분포의 관계**

전략 주어진 식을 이용하여 n, p의 값을 구한 후 이항분포와 정규분포의 관계를 이용한다.

풀이 이항분포 $B(n, p)$를 따르는 확률변수 X의 분산이 $\frac{100}{9}$이므로

$np(1-p) = \frac{100}{9}$ …… ㉠

또, $P(X=x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, n)$이고, $P(X=n-1) = 16P(X=n)$이므로

${}_nC_{n-1} p^{n-1}(1-p)^1 = 16\,{}_nC_n p^n (1-p)^0$

$\therefore n(1-p) = 16p$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$16p^2 = \frac{100}{9} \qquad \therefore p = \frac{5}{6}\ (\because p>0)$

$p=\frac{5}{6}$를 ㉡에 대입하면

$n \times \frac{1}{6} = 16 \times \frac{5}{6} \qquad \therefore n = 80$

확률변수 X가 이항분포 $B\left(80, \frac{5}{6}\right)$를 따르므로

$E(X) = 80 \times \frac{5}{6} = \frac{200}{3}$, $V(X) = 80 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{100}{9}$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{200}{3}, \left(\frac{10}{3}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\frac{X-\frac{200}{3}}{\frac{10}{3}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X \ge 60) &= P\left(Z \ge \frac{60-\frac{200}{3}}{\frac{10}{3}}\right)\\ &= P(Z \ge -2)\\ &= 0.5 + P(0 \le Z \le 2)\\ &= 0.5+0.4772 = 0.9772\end{aligned}$$

295 이항분포와 정규분포의 관계

전략 계란 1개의 무게를 확률변수 X라 하고 계란이 특란일 확률을 구한 후 이항분포와 정규분포의 관계를 이용한다.

풀이 계란 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 계란이 특란일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq 60)&=\mathrm{P}\left(Z_X\geq\frac{60-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_X\geq 2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq 2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

임의로 택한 2500개의 계란 중 특란의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.02)$를 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=2500\times 0.02=50,$

$\mathrm{V}(Y)=2500\times 0.02\times 0.98=49$

따라서 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따르므로 $Z_Y=\dfrac{X-50}{7}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(Y\geq 57)&=\mathrm{P}\left(Z_Y\geq\frac{57-50}{7}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\geq 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z_Y\leq 1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

1등급 비법

임의로 택한 계란 1개의 무게가 60 g 이상일 확률은 0.02이므로 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.02)$를 따른다.

296 이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차

1단계 검은 구슬의 개수를 구한다.

확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2이고, $\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{1}{60}$에서 검은 구슬이 2개이려면 동전 2개를 던졌을 때 모두 앞면이 나오고 주머니에서 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 구슬이어야 한다.

10개의 구슬 중 검은 구슬의 개수를 x라 하면 흰 구슬의 개수는 $10-x$이므로

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{x}{10}\times\frac{x-1}{9}=\frac{1}{60},\ \frac{x(x-1)}{90}=\frac{1}{15}$$

$x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=3\ (\because\ x\geq 0)$

따라서 주머니 속에는 흰 구슬 7개, 검은 구슬 3개가 들어 있다.

2단계 $\mathrm{P}(X=0),\ \mathrm{P}(X=1)$을 구하여 확률분포표를 만든다

(i) 동전 2개를 던져 앞면이 1개 나오고 주머니에서 꺼낸 1개의 구슬이 검은 구슬일 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$$

(ii) 동전 2개를 던져 모두 앞면이 나오고 주머니에서 꺼낸 2개의 구슬 중 1개만 검은 구슬일 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\right)=\frac{7}{60}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{20}+\frac{7}{60}=\frac{4}{15}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=0)&=1-\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\}\\&=1-\left(\frac{4}{15}+\frac{1}{60}\right)=\frac{43}{60}\end{aligned}$$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{43}{60}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{60}$	1

3단계 $\mathrm{E}(X),\ \mathrm{V}(X)$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=0\times\frac{43}{60}+1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{1}{60}\\&=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=0^2\times\frac{43}{60}+1^2\times\frac{4}{15}+2^2\times\frac{1}{60}-\left(\frac{3}{10}\right)^2\\&=\frac{73}{300}\end{aligned}$$

4단계 $\mathrm{V}(30X)$의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{V}(30X)&=30^2\mathrm{V}(X)\\&=900\times\frac{73}{300}=219\end{aligned}$$

297 이항분포

1단계 주어진 사건이 이항분포를 따름을 알고, $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구한다.

흰 구슬 4개와 검은 구슬 1개가 들어 있는 상자에서 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 흰 구슬을 꺼낼 확률은 $\dfrac{4}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(250,\ \dfrac{4}{5}\right)$를 따른다.

$$\mathrm{E}(X)=250\times\frac{4}{5}=200$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=250\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+200^2\\&=40040\end{aligned}$$

2단계 $f(x)$의 최솟값을 구한다.

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{250}(x-k)^2\mathrm{P}(X=k)\\&=x^2\sum_{k=0}^{250}\mathrm{P}(X=k)-2x\sum_{k=0}^{250}k\mathrm{P}(X=k)+\sum_{k=0}^{250}k^2\mathrm{P}(X=k)\\&=x^2\cdot 1-2x\cdot\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(X^2)\\&=x^2-400x+40040\\&=(x-200)^2+40\end{aligned}$$

따라서 $f(x)$는 $x=200$일 때 최솟값 40을 갖는다.

06 통계적 추정

교과서에서 뽑은 기본 문제 pp. 84~85

298 (1) 풀이 참조 (2) $\mathrm{E}(\overline{X})=4$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{3}$

299 (1) 100 (2) 4 (3) 2

300 (1) $64.608\le m\le 65.392$ (2) $64.484\le m\le 65.516$

301 0.42 **302** $\mathrm{N}(0.3,\ 0.0021)$

303 (1) $0.7216\le p\le 0.8784$ (2) $0.6968\le p\le 0.9032$

298 (1)

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $\mathrm{E}(\overline{X})=2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{2}{9}+6\times\frac{1}{9}$

$=4$

$\mathrm{V}(\overline{X})=2^2\times\frac{1}{9}+3^2\times\frac{2}{9}+4^2\times\frac{1}{3}+5^2\times\frac{2}{9}+6^2\times\frac{1}{9}-4^2$

$=\frac{4}{3}$

299 $m=100$, $\sigma^2=16$, $n=4$이므로

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=m=100$

(2) $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{16}{4}=4$

(3) $\sigma(\overline{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\overline{X})}=\sqrt{4}=2$

300 $\overline{x}=65$, $\sigma=4$, $n=400$이므로

(1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$65-1.96\times\frac{4}{\sqrt{400}}\le m\le 65+1.96\times\frac{4}{\sqrt{400}}$

$\therefore\ 64.608\le m\le 65.392$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$65-2.58\times\frac{4}{\sqrt{400}}\le m\le 65+2.58\times\frac{4}{\sqrt{400}}$

$\therefore\ 64.484\le m\le 65.516$

301 $n=50$, $X=21$이므로 표본비율 $\hat{p}$은

$\hat{p}=\frac{X}{n}=\frac{21}{50}=0.42$

302 모비율이 0.3이고, 표본의 크기가 100이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포

$\mathrm{N}\left(0.3,\ \frac{0.3\times0.7}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(0.3,\ 0.0021)$

을 따른다.

303 $\hat{p}=0.8$, $n=100$이므로

(1) 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}\le p\le 0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}$

$\therefore\ 0.7216\le p\le 0.8784$

(2) 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.8-2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}\le p\le 0.8+2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}$

$\therefore\ 0.6968\le p\le 0.9032$

내신 분석 기출문제 pp. 86~91

304 ② **305** ① **306** $\frac{2}{5}$ **307** $\frac{1}{9}$ **308** ②

309 ④ **310** 0.0228 **311** ⑤ **312** ④ **313** ②

314 $65.8\le m\le 68.2$ **315** ③ **316** ④

317 (1) $4.4\le m\le 5.6$ (2) 36 **318** ① **319** 0.8351

320 7 **321** 157 **322** ⑤ **323** 256 **324** 36

325 ② **326** 4 **327** 0.096 **328** ⑤ **329** ③

304 제품의 무게를 확률변수 X라 하면

$\mathrm{E}(X)=20$, $\mathrm{V}(X)=16$, $n=16$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=20$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{16}{16}=1$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=1+400=401$

305 장미꽃의 길이를 확률변수 X라 하면

$\mathrm{E}(X)=50$, $\mathrm{V}(X)=4$, $n=100$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=50$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$

따라서 구하는 값은

$\mathrm{E}(\overline{X})\mathrm{V}(\overline{X})=50\times\frac{1}{25}=2$

306 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{3}{20}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{3}{20}$

$=2$

$\mathrm{V}(X)=0^2\times\frac{3}{20}+1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}$

$+4^2\times\frac{3}{20}-2^2$

$=\frac{8}{5}$

이때 표본의 크기가 10이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{8}{5}}{10}=\frac{4}{25}$

$\therefore\ \sigma(\overline{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\overline{X})}=\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}$

307 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

…… ㉮

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$ …… ㉯

따라서 $\overline{X}$의 분산은

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\frac{5}{9}}{5}=\frac{1}{9}$ …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ X의 확률분포를 표로 나타내기	30%
㉯ $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$의 값 구하기	40%
㉰ $\mathrm{V}(\overline{X})$의 값 구하기	30%

308 확률의 총합이 1이므로

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{2}=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$

이때 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{1}{4}$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\frac{11}{16}}{4}=\frac{11}{64}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=\frac{11}{64}+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{64}$

309 $m=10$, $\sigma^2=25$, $n=100$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=10$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$,

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\overline{X})}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

$\overline{X}$를 표준화하면

$Z=\dfrac{\overline{X}-10}{\frac{1}{2}}=2(\overline{X}-10)$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

310 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 3^2)$을 따르고, 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-10}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 9)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{9-10}{\frac{1}{2}}\right)=\mathrm{P}(Z\le -2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

311 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{m^2}{16}\right)$을 따르고, 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\frac{m^2}{16}}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{m}{40}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{m}{40}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(m\le\overline{X}\le 82)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{82-m}{\frac{m}{40}}\right)$

이때 $\mathrm{P}(m\le\overline{X}\le 82)=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$이므로

$\dfrac{82-m}{\frac{m}{40}}=1$, $82-m=\frac{m}{40}$

$\therefore m=80$

312 $\mathrm{E}(\overline{X})=100$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=36$이므로

$\mathrm{E}(X)=100$, $\mathrm{V}(X)=144$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 12^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-100}{12}$으로 놓으면

$\mathrm{P}(88\le X\le 130)=\mathrm{P}\left(\frac{88-100}{12}\le Z\le\frac{130-100}{12}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=0.3413+0.4938$

$=0.8351$

313 상담 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르고, 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(20,\ \frac{5^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(20,\ \left(\frac{5}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-20}{\frac{5}{4}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(19\le\overline{X}\le 22)=\mathrm{P}\left(\dfrac{19-20}{\frac{5}{4}}\le Z\le\dfrac{22-20}{\frac{5}{4}}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.8\le Z\le 1.6)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)$

$=0.2881+0.4452$

$=0.7333$

314 표본평균 $\overline{x}=67$, 모표준편차 $\sigma=4$, 표본의 크기 $n=100$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$67-3\frac{4}{\sqrt{100}}\le m\le 67+3\frac{4}{\sqrt{100}}$

$\therefore$ $65.8\le m\le 68.2$

315 표본의 크기가 n, 표본평균 $\overline{x}=11$, 모표준편차 $\sigma=5$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$11-1.96\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le 11+1.96\frac{5}{\sqrt{n}}$

이때 $10.51\le m\le 11.49$이므로

$11-1.96\frac{5}{\sqrt{n}}=10.51$, $11+1.96\frac{5}{\sqrt{n}}=11.49$

$1.96\frac{5}{\sqrt{n}}=0.49$, $\sqrt{n}=20$

$\therefore$ $n=400$

316 딸기의 무게를 확률변수 X라 하고 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 하자. 표본평균이 20, 표본표준편차가 5이므로 모평균 m을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은

$20-1.96\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le 20+1.96\frac{5}{\sqrt{n}}$

이때 $19.02\le m\le a$이므로

$20-1.96\frac{5}{\sqrt{n}}=19.02$, $20+1.96\frac{5}{\sqrt{n}}=a$

두 식을 연립하여 풀면 $n=100$, $a=20.98$

$\therefore$ $n+a=120.98$

317 (1) 표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 3을 사용할 수 있고, 표본평균이 5이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$5-2\times\frac{3}{\sqrt{100}}\le m\le 5+2\times\frac{3}{\sqrt{100}}$

$\therefore$ $4.4\le m\le 5.6$ …… ㉮

(2) 표본의 크기를 n이라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{X}-2\times\frac{3}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{X}+2\times\frac{3}{\sqrt{n}}$

$-\frac{6}{\sqrt{n}}\le m-\overline{X}\le\frac{6}{\sqrt{n}}$

$\therefore$ $|m-\overline{X}|\le\frac{6}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 차가 1분 이하이어야 하므로

$\frac{6}{\sqrt{n}}\le 1$, $\sqrt{n}\ge 6$

$\therefore$ $n\ge 36$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 36이다. …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 신뢰도 95 %의 신뢰구간 구하기	50%
㉯ 표본의 크기의 최솟값 구하기	50%

318 학생 150명 중에서 여름휴가 장소로 바다를 선호하는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 표본의 크기 150이 충분히 크므로 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.4,\ \frac{0.4\times0.6}{150}\right)$을 따르고,

$Z=\frac{\hat{p}-0.4}{\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{150}}}=\frac{\hat{p}-0.4}{0.04}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{69}{150}\right)&=\mathrm{P}(\hat{p}\ge0.46)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{0.46-0.4}{0.04}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

319 100명 중에서 7월에 태어난 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 표본의 크기 100이 충분히 크므로 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.2,\ \frac{0.2\times0.8}{100}\right)$을 따르고,

$Z=\frac{\hat{p}-0.2}{\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{16}{100}\le\hat{p}\le\frac{30}{100}\right)&=\mathrm{P}(0.16\le\hat{p}\le0.3)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{0.16-0.2}{0.04}\le Z\le\frac{0.3-0.2}{0.04}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le2.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)\\&=0.3413+0.4938=0.8351\end{aligned}$$

320 주민 100명 중에서 반대하는 주민의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 표본의 크기 100이 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.1,\ \frac{0.1\times0.9}{100}\right)$를 따르고,

$Z=\frac{\hat{p}-0.1}{\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{0.03}$은 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. …… ㉮

이때 반대하는 주민이 k명 이하일 확률이 0.16이므로

$\mathrm{P}\left(\hat{p}\le\frac{k}{100}\right)=0.16$

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\frac{k}{100}-0.1}{0.03}\right)=0.16$ …… ㉠

한편, $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.34$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z\le-1)&=\mathrm{P}(Z\ge1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{\frac{k}{100}-0.1}{0.03}=-1$이므로

$\dfrac{k}{100}=0.07$ $\quad\therefore k=7$ …… ㉯

채점 기준	배점 비율
㉮ 표본비율 $\hat{p}$의 분포 구하기	30%
㉯ k의 값 구하기	70%

321 $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$로 놓으면 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(|\hat{p}-p|\le 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})})$

$=\mathrm{P}(-0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\le\hat{p}-p\le 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})})$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{-0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}\le Z\le\dfrac{0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.16\sqrt{n}\le Z\le 0.16\sqrt{n})$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.16\sqrt{n})\ge 0.9544$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le 0.16\sqrt{n})\ge 0.4772$

즉, $0.16\sqrt{n}\ge 2$에서 $\sqrt{n}\ge 12.5$

$\therefore n\ge 156.25$

따라서 n의 최솟값은 157이다.

322 표본비율은 $\dfrac{75}{300}=0.25$이고, 표본의 크기 300은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.25-2.6\sqrt{\dfrac{0.25\times0.75}{300}}\le p\le 0.25+2.6\sqrt{\dfrac{0.25\times0.75}{300}}$

$\therefore 0.185\le p\le 0.315$

323 표본비율이 0.8, 표본의 크기가 n이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.8-1.96\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{n}}\le p\le 0.8+1.96\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{n}}$

$\therefore a=0.8-1.96\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{n}},\ b=0.8+1.96\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{n}}$

이때 $b-a=0.098$이므로

$2\times1.96\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{n}}=0.098$

$\sqrt{n}=\dfrac{2\times1.96\times0.4}{0.098}=16$

$\therefore n=256$

324 구하는 표본의 크기를 n이라 하면 표본비율 $\hat{p}$은

$\hat{p}=\dfrac{10}{100}=0.1$ …… ㉮

이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.1-2\sqrt{\dfrac{0.1\times0.9}{n}}\le p\le 0.1+2\sqrt{\dfrac{0.1\times0.9}{n}}$

$-2\sqrt{\dfrac{0.1\times0.9}{n}}\le p-0.1\le 2\sqrt{\dfrac{0.1\times0.9}{n}}$

$|p-0.1|\le 2\sqrt{\dfrac{0.1\times0.9}{n}}$ …… ㉯

이때 모비율 p와 표본비율 $\hat{p}$의 차가 0.1 이하가 되어야 하므로

$2\sqrt{\dfrac{0.1\times0.9}{n}}\le 0.1$

$\sqrt{n}\ge 6$ $\quad\therefore n\ge 36$

따라서 표본은 최소 36명 이상이어야 한다. …… ㉰

채점 기준	배점 비율
㉮ $\hat{p}$의 값 구하기	10%
㉯ p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 간단히 나타내기	50%
㉰ 표본의 크기의 최솟값 구하기	40%

325 ㄱ. $\mathrm{V}(\hat{p})=\dfrac{pq}{n}$ $(q=1-p)$이므로 n의 값이 커지면 표본비율의 분산은 작아진다.

ㄴ. $p>0,\ q>0(q=1-p)$이므로

$\sqrt{pq}\le\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$에서 $\sqrt{\dfrac{pq}{n}}\le\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

즉, 표본비율의 표준편차의 최댓값은 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(0\le Z\le k)=\dfrac{\alpha}{200}$라 하면 신뢰도 α %로 추정한 모비율 p에 대한 신뢰구간의 길이는 $2k\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ $(\hat{q}=1-\hat{p})$이므로

$b-a=2k\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

이때 α의 값이 커지면 k의 값도 커지므로 n과 $\hat{p}$의 값이 일정하면 $b-a$의 값은 커진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

326 표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 10을 사용할 수 있다.

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2\dfrac{10}{\sqrt{100}}=4$

327 표본비율은 $\dfrac{144}{400}=0.36$이고, 표본의 크기 400이 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2\sqrt{\dfrac{0.36\times0.64}{400}}=0.096$

328 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는 $2\times1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 $\sigma=6$이므로 $2\times1.96\dfrac{6}{\sqrt{n}}\le 2$

$\sqrt{n}\ge 11.76$ $\quad\therefore n\ge 138.2976$

따라서 구하는 최솟값은 139이다.

329 ㄱ. 표본의 크기를 n이라 하면 표본평균 $\overline{X}$의 분산은

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$이므로 $\mathrm{V}(\overline{X})$는 표본의 크기에 반비례한다.

ㄴ. 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 하면

모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 포함한다.

ㄷ. 표본의 크기를 n이라 하면

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는 $2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$이고 신뢰도가 일정하므로 k의 값은 일정하다.

따라서 표본의 크기가 작을수록 신뢰구간의 길이는 길어진다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

내신 완성 1등급문제 pp. 92~93

330 76	**331** $\frac{75}{2}$	**332** ⑤	**333** ⑤	**334** 666
335 ⑤	**336** ②	**337** 80		

330 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

전략 $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$임을 이용한다.

풀이 $\mathrm{V}(\overline{X})=4$이므로

$\dfrac{4^2}{n}=4\qquad\therefore n=4$

또, $\mathrm{E}(\overline{X})=8$이고,

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$4=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-64$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X}^2)=68$

따라서 $\overline{X}^2+2n$의 평균은

$\mathrm{E}(\overline{X}^2+2n)=\mathrm{E}(\overline{X}^2+8)$

$=\mathrm{E}(\overline{X}^2)+8$

$=68+8=76$

331 표본평균의 평균, 분산, 표준편차

전략 $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=5$이므로

$2\times a+4\times\left(\dfrac{1}{3}-a\right)+6\times\dfrac{1}{2}+8\times\dfrac{1}{6}=5$

$\therefore a=\dfrac{1}{3}$ …… ㉮

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=2^2\times\dfrac{1}{3}+4^2\times0+6^2\times\dfrac{1}{2}+8^2\times\dfrac{1}{6}-5^2=5$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{5}{2}$ …… ㉯

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=\dfrac{5}{2}+5^2=\dfrac{55}{2}$ …… ㉰

$\mathrm{V}(2\overline{X}+1)=2^2\mathrm{V}(\overline{X})=4\times\dfrac{5}{2}=10$ …… ㉱

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X}^2)+\mathrm{V}(2\overline{X}+1)$

$=\dfrac{55}{2}+10=\dfrac{75}{2}$ …… ㉲

채점 기준	배점 비율
㉮ a의 값 구하기	20%
㉯ $\mathrm{V}(\overline{X})$의 값 구하기	20%
㉰ $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$의 값 구하기	25%
㉱ $\mathrm{V}(2\overline{X}+1)$의 값 구하기	25%
㉲ $\mathrm{E}(\overline{X}^2)+\mathrm{V}(2\overline{X}+1)$의 값 구하기	10%

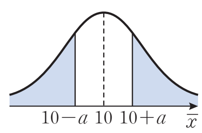
332 표본평균의 분포

전략 모집단이 정규분포를 따르면 표본의 표본평균도 정규분포를 따른다는 것을 이용하여 표준화한다.

풀이 ㄱ. $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{2^2}{n}=\dfrac{4}{n}$

ㄴ. $\mathrm{E}(\overline{X})=10$에서 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10,\ \dfrac{2^2}{n}\right)$을 따르고,

$\mathrm{E}(\overline{X})=10$이므로 표본평균 $\overline{X}$의 정규분포곡선은 오른쪽 그림과 같이 직선 $\overline{x}=10$에 대하여 대칭이다.



$\therefore \mathrm{P}(\overline{X}\le10-a)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge10+a)$

ㄷ. $Z=\dfrac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge a)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}(Z\le b)$

이때 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z의 정규분포곡선은 직선 $z=0$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}+b=0,\ a-10+\dfrac{2}{\sqrt{n}}b=0$

$\therefore a+\dfrac{2}{\sqrt{n}}b=10$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

333 표본평균의 분포

전략 표본평균 $\overline{X}$의 분포를 구한 후 $\overline{X}$를 표준화한다.

풀이 전구의 수명을 확률변수 X라 하면 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(1400,\ 100^2)$을 따르고, 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(1400,\ \left(\frac{100}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-1400}{\frac{100}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge 1350+\frac{165}{\sqrt{n}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{1350+\frac{165}{\sqrt{n}}-1400}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\frac{165}{\sqrt{n}}-50}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge 1.65-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

즉, $\mathrm{P}\left(Z\ge 1.65-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.95$이므로

$0.5+\mathrm{P}\left(1.65-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le 0\right)\ge 0.95$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}-1.65\right)\ge 0.45$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.65)=0.45$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}-1.65\ge 1.65$

$\frac{\sqrt{n}}{2}\ge 3.3,\ \sqrt{n}\ge 6.6$

$\therefore\ n\ge 43.56$

따라서 구하는 n의 최솟값은 44이다.

1등급 비법

> 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고,
> $\mathrm{P}(Z\ge a)=p$일 때, $p>0.5$이면 $a<0$이므로
> $\mathrm{P}(Z\ge a)=\mathrm{P}(a\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)$
> $\qquad\qquad=\mathrm{P}(a\le Z\le 0)+0.5$

334 모평균의 추정

전략 신뢰도 99%로 추정한 모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 차는 $|m-\overline{X}|\le 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 표본평균이 80 g이고, 표본의 크기가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 5 g을 사용할 수 있다.
표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 99 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$80-2.58\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le 80+2.58\frac{5}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ |m-80|\le\frac{12.9}{\sqrt{n}}$

이때 모평균과 표본평균의 차 $|m-80|$이 0.5 g 이하이려면

$\frac{12.9}{\sqrt{n}}\le 0.5,\ \sqrt{n}\ge 25.8$

$\therefore\ n\ge 665.64$

따라서 표본의 크기를 666 이상으로 해야 한다.

335 표본비율의 분포

전략 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{p(1-p)}{n}\right)$를 따르고, $Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따름을 이용한다.

풀이 100가구 중에서 자택을 소유한 가구의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 표본의 크기 100이 충분히 크므로 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{p(1-p)}{100}\right)$를 따르고,

$Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\hat{p}\ge 0.6)=0.9772$이므로

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{0.6-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}}\right)=0.5+0.4772=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge -2)$$

즉, $\dfrac{0.6-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}}=-2$이므로 $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$0.6-p=-2\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}$

양변을 제곱하여 정리하면

$26p^2-31p+9=0$

$(2p-1)(13p-9)=0$

$\therefore\ p=\frac{1}{2}$ 또는 $p=\frac{9}{13}$

㉠에서 좌변이 음수가 되려면 $0.6-p<0$이어야 하므로

$p>0.6$

따라서 $p=\frac{9}{13}$이므로 $26p=26\times\frac{9}{13}=18$

336 모평균의 추정 ⊕ 신뢰구간의 길이

1단계 주어진 표준정규분포표를 이용하여 신뢰도가 98 %일 때의 신뢰구간의 길이를 구한다.

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2.32)=0.49$에서

$\mathrm{P}(-2.32\le Z\le 2.32)=0.98$

모평균 m에 대한 신뢰도 98 %의 신뢰구간이

$\overline{x}-d\le m\le\overline{x}+d$이므로 신뢰구간의 길이 $2d$는

$2d=2\times 2.32\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2단계 주어진 신뢰구간을 이용하여 신뢰도 α %를 구한다.

모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간이

$\overline{x}-\frac{d}{2}\le m\le\overline{x}+\frac{d}{2}$이므로 신뢰구간의 길이 d는

$d=2.32\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ d=2\times1.16\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.16)=0.38$이므로

$\mathrm{P}(-1.16\le Z\le1.16)=0.76$

따라서 신뢰구간의 길이가 d인 신뢰구간의 신뢰도는 76 %이다.

$\therefore\ \alpha=76$

1등급 비법

$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=\frac{\alpha}{100}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이는 $2\times k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

337 모비율의 추정

1단계 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 이용하여 표본비율 $\hat{p}$을 구한다.

표본비율이 $\hat{p}$이고 표본의 크기가 n이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ (단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)

이때 $0.7216\le p\le0.8784$이므로

$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.7216$ …… ㉠

$\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=0.8784$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\hat{p}=1.6 \qquad \therefore\ \hat{p}=0.8$

2단계 ㉠ 또는 ㉡에 표본비율 $\hat{p}$의 값을 대입하여 표본의 크기 n의 값을 구한다.

$\hat{p}=0.8$이면 $\hat{q}=1-0.8=0.2$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}=0.8784$

$\frac{1.96\times0.4}{\sqrt{n}}=0.0784$

$\sqrt{n}=10 \qquad \therefore\ n=100$

3단계 $\hat{p}$과 n의 값을 이용하여 학생 수를 구한다.

여름 방학 동안의 봉사 활동 시간이 20시간 이상인 학생 수를 X라 할 때, 표본비율 $\hat{p}$은 100명의 학생 중에서 여름 방학 동안 20시간 이상 봉사 활동을 한 학생의 비율이므로

$0.8=\frac{X}{100} \qquad \therefore\ X=80$

따라서 구하는 학생 수는 80이다.

III. 통계

III단원 실전 대비 평가문제 pp. 94~95

338 ②	339 ④	340 ①	341 0.0668	342 16
343 51	344 ⑤	345 ③		

338 이산확률분포와 확률질량함수

전략 확률변수 X의 확률의 총합은 1이고, $\mathrm{P}(X=x_i$ 또는 $X=x_j)=\mathrm{P}(X=x_i)+\mathrm{P}(X=x_j)$ $(i\ne j)$임을 이용한다.

풀이 확률의 총합은 1이므로

$a+b+c=1$ …… ㉠

$a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b=\frac{a+c}{2}$ …… ㉡

$\mathrm{P}(X^2-5X+6\le0)$

$=\mathrm{P}((X-2)(X-3)\le0)=\mathrm{P}(2\le X\le3)$

$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{2}$

$b+c=\frac{1}{2}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{3},\ c=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{6}$

339 이항분포의 평균, 분산, 표준편차

전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, 평균은 $\mathrm{E}(X)=np$, 분산은 $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(9,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=9p,\ \mathrm{V}(X)=9p(1-p)$

$\{\mathrm{E}(X)\}^2=\mathrm{V}(X)$이므로

$(9p)^2=9p(1-p)$

$90p^2-9p=0$

$9p(10p-1)=0$

$\therefore\ p=\frac{1}{10}$ $(\because\ 0<p<1)$

340 정규분포

전략 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\le80)=0.5$에서 $m=80$ …… ㉠

$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{11}{10}m\right)=0.1587$이므로

$\mathrm{P}\left(m\le X\le\frac{11}{10}m\right)=0.5-0.1587=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(m\le X\le m+1.0\sigma)=0.3413$이므로

$\frac{11}{10}m=m+1.0\sigma$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{11}{10}\times80=80+\sigma \qquad \therefore\ \sigma=8$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge96)=0.5-\mathrm{P}(80\le X\le80+2.0\times8)$

$=0.5-0.4772$

$(\because\ \mathrm{P}(m\le X\le m+2.0\sigma)=0.4772)$

$=0.0228$

341 이항분포와 정규분포의 관계

전략 확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $N(np, npq)$를 따름을 이용한다.
(단, $p+q=1$)

풀이 확률변수 X가 이항분포 $B(450, p)$를 따르므로

$E(X)=450p,\ V(X)=450p(1-p)$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(450p, 450p(1-p))$를 따른다.

이때 $P(X\le 150)=0.5$에서

$450p=150$

$\therefore p=\frac{1}{3}$

$\therefore V(X)=450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=100$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(150, 10^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(X\le 135)&=P\left(Z\le\frac{135-150}{10}\right)\\&=P(Z\le -1.5)\\&=P(Z\ge 1.5)\\&=0.5-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

342 표본평균의 분포

전략 모집단이 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

풀이 모집단이 정규분포 $N(75, 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(75, \left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{X}-75}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(73\le\overline{X}\le 77)\ge 0.96$에서

$$\begin{aligned}&P\left(\frac{73-75}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{77-75}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)\\&=P\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\\&=2P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.96\end{aligned}$$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.48$

그런데 $P(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}\ge 2,\ \sqrt{n}\ge 4$

$\therefore n\ge 16$

따라서 n의 최솟값은 16이다.

343 모평균의 추정

전략 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임을 이용한다.

풀이 표본평균의 값을 $\overline{x}$, 표본의 크기를 n이라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=100.4$ ...... ㉠

$\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=139.6$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\overline{x}=240$

$\therefore \overline{x}=120$

$\overline{x}=120$을 ㉡에 대입하면

$1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=19.6\qquad\therefore \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=10$

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$120-2.58\times 10\le m\le 120+2.58\times 10$

즉, $94.2\le m\le 145.8$이므로 신뢰도 99 %의 신뢰구간에 속하는 자연수는 95, 96, 97, ⋯, 145의 51개이다.

1등급 비법

정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$에 대하여 신뢰도 α %로 모평균 m을 추정하면

① 신뢰구간은 $|m-\overline{x}|\le k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\text{단, } P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}\right)$

344 표본비율의 분포

전략 표본비율 $\hat{p}$이 따르는 정규분포 $N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$를 구하고 확률변수를 표준화한다. (단, $q=1-p$)

풀이 1600명 중에서 국가공인 자격증을 가지고 있는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 표본의 크기 1600은 충분히 크므로 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포 $N\left(0.2, \frac{0.2\times 0.8}{1600}\right)$을 따르고,

$Z=\frac{\hat{p}-0.2}{\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{1600}}}=\frac{\hat{p}-0.2}{0.01}$는 근사적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. 이때

$$\begin{aligned}P\left(\hat{p}\ge\frac{k}{100}\right)&=P(\hat{p}\ge 0.01\times k)\\&=P\left(Z\ge\frac{0.01\times k-0.2}{0.01}\right)\\&=0.5-P\left(0\le Z\le\frac{0.01\times k-0.2}{0.01}\right)\\&=0.0082\end{aligned}$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{0.01\times k-0.2}{0.01}\right)=0.5-0.0082$$
$$=0.4918$$

그런데 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.4)=0.4918$이므로

$$\frac{0.01\times k-0.2}{0.01}=2.4$$

$0.01k=0.224$

$\therefore\ k=22.4$

345 모비율의 추정

전략 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 임을 이용한다. (단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)

풀이 표본비율 $\hat{p}=\dfrac{75}{300}=0.25$이고 표본의 크기 75가 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.25-1.96\sqrt{\frac{0.25\times 0.75}{300}}\le p\le 0.25+1.96\sqrt{\frac{0.25\times 0.75}{300}}$$

$0.25-0.049\le p\le 0.25+0.049$

$\therefore\ 0.201\le p\le 0.299$

MEMO

MEMO